සංයුක්ත ගණිතය II

පිළිතුරු

එක් එක් ප්‍රශ්නයට ලකුණු 100 බැගින්.

1. (a) M ස්කන්ධය වන P අංශුවේ චලිතය් ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ ABC රේඛාවෙන් දැක්වෙයි.

$OA = u, \quad CH = u \quad \tan\theta = g$ වෙයි.

$$\frac{AE}{OB} = \frac{u}{OB} = g$$

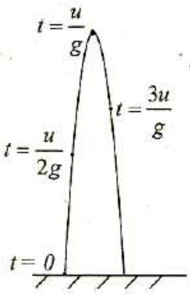
$$OB = \frac{u}{g}$$

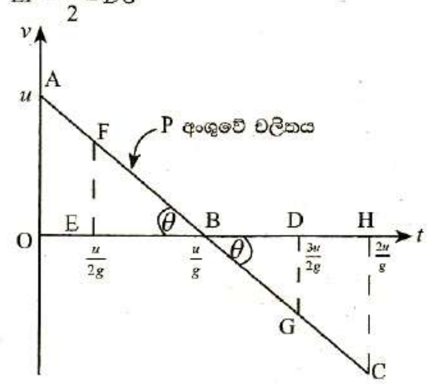
$$OE = \frac{u}{2g} = \frac{1}{2}OB$$

$$\frac{u}{BH} = \tan\theta = g$$

$$BH = \frac{u}{g}$$

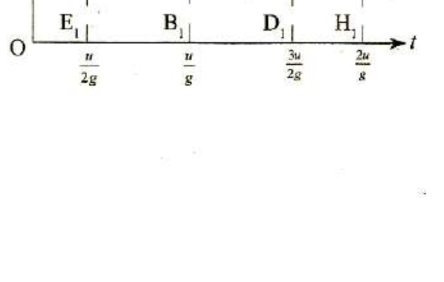
$$EF = \frac{u}{2} = DG$$





P_1, P_2, P_3 අංශුවල සිරස් ප්‍රවේග සංරචකයත් P අංශුවේ සිරස් ප්‍රවේග සංරචකයත් එකම වන බැවින් P අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරත් P_1, P_2, P_3 අංශුවල සිරස් ප්‍රවේග ප්‍රස්ථාරයත් එකම වන්නේ අංශු සියල්ලම g ගුරුත්වජ ත්වරණය යටතේ චලිතය වන බැවිනි. එවිට P_1 අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය FC ද, P_2 අංශුවේ BC ද, P_3 අංශුවේ GC ද වශයෙන් P අංශුවේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය සමග සමපාත වූ කොටස් ලැබේ.

P_1, P_2, P_3 අංශුවල තිරස් චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය



(i) P, P_1, P_2, P_3 අංශු හතරම $\frac{2u}{g}$ කාලයක දී පොළවට පැමිණෙයි.

(ii) P_1 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර

$= E_1H_1K_1F_1$ වර්ගඵලය

$$= 2v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{2g}\right)$$

$$= 2v.\frac{3u}{2g}$$

$$= \frac{3uv}{g}$$

P_2 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= B_1H_1NM$ වර්ගඵලය

$$= 3v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{g}\right)$$

$$= 3v \times \frac{u}{g}$$

$$= \frac{3vu}{g}$$

P_3 අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= D_1H_1RQ$ වර්ගඵලය

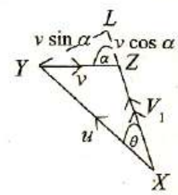
$$= 6v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{3u}{2g}\right)$$

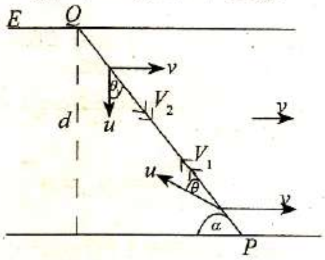
$$= 3v \times \frac{u}{g}$$

$$= \frac{3vu}{g}$$

අංශු සියල්ලම එකම සිරස් රේඛාවේ ගමන් කරන අතර P_1, P_2, P_3 අංශු ගමන් කරන තිරස් දුර ද සමාන වන බැවින් P අංශුව හැර P_1, P_2, P_3 අංශු තුන පොළවේ එකම ස්ථානයකට වැටේ.

(b) M - මිනිසා, R - ගඟ, E - ඉවුර (පොළොව) යයි ගනිමු.

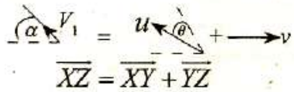




Q ලක්ෂ්‍යය ගඟ ගලන දිශාවට ඉහළින් පිහිටන අවස්ථාව සලකමු.

P සිට Q දක්වා චලිතය

$(M, E) \quad = \quad (M, R) + (R, E)$



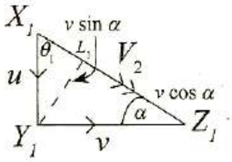
$$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$

එවිට $\quad V_1 = LX - LZ$

$$V_1 = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha$$

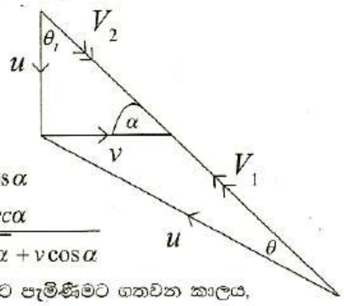
$$t_{PQ} = \frac{d\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{V_1} = \frac{d\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha}$$

Q සිට P දක්වා චලිතය



$(M, E) = (M, R)+(R, E)$

$\underset{\alpha}{\searrow} V_2 = \underset{\theta_1}{\swarrow} u + \xrightarrow{} v$



$\overline{X_1Z_1} = \overline{X_1Y_1} + \overline{Y_1Z_1}$

$V_2 = L_1X_1 + L_1Z_1$

$V_2 = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} + v\cos\alpha$

$t_{QP} = \dfrac{PQ}{V_2} = \dfrac{d\cos ec\alpha}{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} + v\cos\alpha}$

P සිට Q දක්වා ගොස් ආපසු P ට පැමිණීමට ගතවන කාලය,

$= t_{PQ} + t_{QP}$

$$= \frac{d\cos ec\alpha}{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha} + \frac{d\cos ec\alpha}{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} + v\cos\alpha}$$

$$= \frac{d\cos ec\alpha\left[\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} + v\cos\alpha + \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha\right]}{(u^2 - v^2\sin^2\alpha) - v^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{d\cos ec\alpha \;.\; 2\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha}}{u^2 - v^2}$$

$$T = \frac{2d\sqrt{u^2\cos ec^2\alpha - v^2}}{u^2 - v^2}$$

(i) Q ලක්ෂ්‍යය, ගඟ ගලන දිශාවේ පිහිටයි නම් ඉහත ප්‍රකාශනයේ α වෙනුවට $(\pi - \alpha)$ ආදේශ කළ විට අවශ්‍ය කාලය ලැබේ.

$$T' = \frac{2d\sqrt{u^2\cos ec^2(\pi - \alpha) - v^2}}{u^2 - v^2}$$

$$\therefore T = T' = \frac{2d\sqrt{u^2\cos ec^2\alpha - v^2}}{u^2 - v^2}$$

ඒ අනුව Q ලක්ෂ්‍ය ගඟ පහළ පිහිටන විට ද පිහිනීමට ගත වන කාලයේ වෙනසක් සිදු නොවේ.

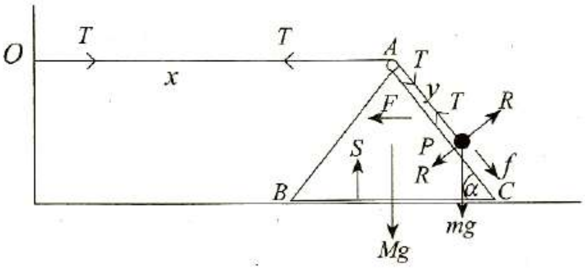
(ii) T අවම වීමට $\text{cosec}^2\alpha$ අවම විය යුතුය. එනම් $\sin^2\alpha$ උපරිම විය යුතුය. එවිට $\sin^2\alpha = 1$ නිසා,

$$T_{\text{අවම}} = \frac{2d}{\sqrt{u^2 - v^2}} \text{ ද, } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ද වේ.}$$

මෙම අවස්ථාවේ දී PQ ඉවුරට ලම්බ වෙයි.

---

2. $(M, E) = F \longleftarrow$ ද, $(m, M) = \underset{\alpha}{\searrow} f$ යයි දී තිබේ.



සාපේක්ෂ ත්වරණ මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$(m, E) = (m, M) + (M, E)$

$= \underset{\alpha}{\searrow} f + F \longleftarrow$

$= \overleftarrow{F} \; \underset{\alpha}{\searrow} f$

$OA = x$ සහ $AP = y$ යයි ගනිමු.

එවිට, $l = OA + AP = x + y$

t විෂයෙන් දෙවරක් අවකලනය කිරීමෙන්,

$\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, $\ddot{x} = -\ddot{y}$

$\ddot{x} = -F$ ද, $\ddot{y} = f$ ද බැවින් $-F = -f$ $\quad \therefore F = f$

පද්ධතියට, $\leftarrow$; $T = MF + m(F - F\cos\alpha)$..............................(1)

P අංශුවට, $\searrow$; $mg\sin\alpha - T = m(F - F\cos\alpha)$..............................(2)

$(1)+(2)$; $mg\sin\alpha = MF + m(F - F\cos\alpha) + m(F - F\cos\alpha)$

$mg\sin\alpha = F[M + 2m(1 - \cos\alpha)]$

$$\therefore F = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$$

තවත් ක්‍රමයක් [$F = f$ බව පෙන්වීමට]

Aට සාපේක්ෂව P අංශුවේ විස්ථාපනයත්, O සාපේක්ෂව Aහි විස්ථාපනයත් විශාලත්වයෙන් සමාන වේ.

එවිට Aට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයත්, Oට සාපේක්ෂව Aහි ත්වරණයත් විශාලත්වයෙන් සමාන වෙයි.

Oට සාපේක්ෂව Aහි ත්වරණය යනු පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය වන අතර Aට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය වෙයි..

එවිට $F = f$ වේ.

එවිට කුඤ්ඤ $\dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$ ත්වරණයෙන් බිත්තිය දෙසට චලිත වෙයි.

$PC > d$ නම් B හි සිට බිත්තියට ඇති දුර d ට වඩා වැඩි බැවින් කුඤ්ඤය B හිදී බිත්තියේ වදී.

කුඤ්ඤය බිත්තියේ වැදීමට ගත වන කාලය t යැයි ගනිමු.

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ යෙදීමෙන්,}$$

$$d = 0 + \frac{1}{2}Ft^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2d}{F}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2d[M + 2m(1 - \cos\alpha)]}{mg\sin\alpha}}$$

කුඤ්ඤය බිත්තියේ වදින වේගය u යැයි ගනිමු. $v = u + at$ යෙදීමෙන්,

$\leftarrow u = 0 + Ft$

$$= \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)} \times \sqrt{\frac{2d[M + 2m(1 - \cos\alpha)]}{mg\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2dmg\sin\alpha}{[M + 2m(1 - \cos\alpha)]}}$$

t කාලයේ දී P අංශුවේ කුඤ්ඤට සාපේක්ෂ ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

$$v = u + at$$

කුඤ්ඤුවට සාපේක්ෂව යෙදීමෙන්, $\searrow v = 0 + ft$

$$= Ft$$

$$= \sqrt{\frac{2dmg\ \sin\alpha}{[M+2m(1-\cos\alpha)]}} = u$$

බිත්තියේ ගැටීමට මොහොතකට පෙර පොළොවට සාපේක්ෂව

P අංශුවේ ප්‍රවේගය $= \underset{u}{\longleftarrow} \ \alpha\!\searrow_{u}$

P ගේ ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය $v = \sqrt{u^2+u^2+2u^2\cos(\pi-\alpha)}$

$$= \sqrt{2u^2 - 2u^2\cos\alpha}$$

$$= u\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

$$\therefore v = 2\sqrt{\frac{dmg\ \sin\alpha(1-\cos\alpha)}{[M+2m(1-\cos\alpha)]}}$$

---

3. P සහ Q අංශු අතර තිරස් දුර d යැයි ගනිමු. P අංශුවේ ආරම්භක සිරස් සහ තිරස් ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙලින් $u\cos\alpha$ සහ $u\sin\alpha$ වෙයි. P සහ Q අංශු ගැටෙන විට P අංශුව තිරස් ලෙස චලිත වන බැවින්, $\uparrow v = u + at$ යෙදීමෙන්,

$$0 = u\sin\alpha - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u\sin\alpha}{g}$$

මෙහි t යනු තිරස් ලෙස d දුරක් චලිතවීමට ගතවන කාලයයි.

P අංශුවට $\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

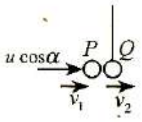
$$d = u\cos\alpha\ .\ t + 0$$

$$= u\cos\alpha.\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)$$

$$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

P සහ Q අංශු ගැටීමට මොහොතකට පෙර තිරස් ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙළින් $u\cos\alpha$, 0 වන අතර ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු v_1 සහ v_2 යයි ගනිමු.

රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,



$$\rightarrow mv_1 + mv_2 = mu\cos\alpha$$

$$v_1 + v_2 = u\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්,

$$v_1 - v_2 = -eu\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

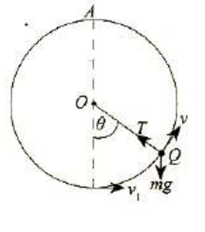
$(1)+(2),\ 2v_1 = u\cos\alpha(1-e)$

$$v_1 = \frac{u}{2}(1-e)\cos\alpha$$

$(1)-(2),\ 2v_2 = u\cos\alpha(1+e) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{u}{2}(1+e)\cos\alpha$

Q අංශුවේ වෘත්තාකාර චලිතයේ දී ශක්ති හානියක් සිදු නොවන බැවින් OQ තන්තුව යටි සිරස θ කෝණයක් ආනත කරන පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය T යයි ද Qගේ ප්‍රවේගය v යයි ද ගනිමු. O හරහා විභව ශක්තිය ශූන්‍ය මට්ටම ගනිමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta$$

$$v^2 = v_2^2 - 2gl + 2gl\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$= \frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 2gl\cos\theta$$

Q අංශුවට $F = ma$ යොදමු.

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{l}\left[\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 2gl\cos\theta\right]$$

$$= \frac{m}{l}\left[\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 3gl\cos\theta\right]$$

තන්තුව ඇදී පවතිමින්, වෘත්තයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි නම් Q අංශුව පූර්ණ සිරස් වෘත්තයක චලිත වෙයි.

එවිට $\theta = \pi$ සහ $T_\pi \geq 0$ විය යුතුය.

$$T_\pi = \frac{m}{l}\left[\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 2gl + 3gl\right]$$

$$= \frac{m}{l}\left[\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha - 5gl\right] \geq 0$$

$$\frac{u^2}{4}(1+e)^2\cos^2\alpha \geq 5gl$$

$$\Rightarrow u^2\cos^2\alpha \geq \frac{20gl}{(1+e)^2}$$

$$\Rightarrow u\cos\alpha \geq \frac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$$

P සහ Q ගැටීම නිසා P අංශුවේ සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය වෙනස් නොවන බැවින් $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ සිරස්ව ඉහළට යෙදීමෙන් නැවත P අංශුව පොළොවට පැමිණීමට ගත වන කාලය වන T සොයමු.

$$\uparrow 0 = u\sin\alpha T - \frac{1}{2}gT^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

එබැවින් ගැටුම් මොහොතේ සිට P අංශුව පොළොවට වැටීමට ගත වන කාලය,

$$t' = T - t$$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g} - \frac{u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u\sin\alpha}{g}$$

P අංශුව ගමන් කරන තිරස් දුර $= d + v_1 t'$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u}{2}(1-e)\cos\alpha.\frac{u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u^2(1-e)}{2g}\cos\alpha\sin\alpha$$

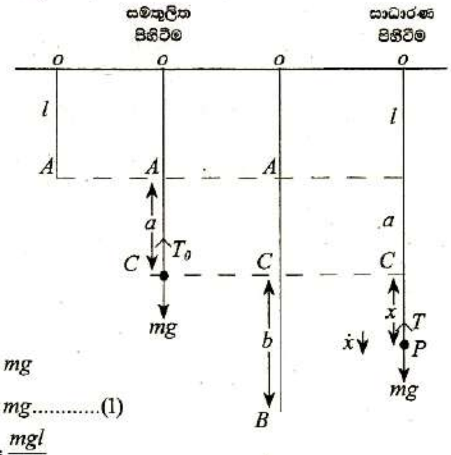
$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g} + \frac{u^2}{4g}(1-e)\sin 2\alpha$$

$$= \frac{u^2}{4g}\sin 2\alpha(3-e)$$

$e=3$ නම්, P අංශුව ගමන් කරන දුර ශූන්‍ය වන බැවින් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට

පැමිණෙයි.

4. අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීම C යයි ගනිමු.
එවිට තන්තුවේ ආතතිය T_0 නම්,



$$T_0 = mg$$

$$\frac{\lambda}{l}a = mg \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{mgl}{\lambda}$$

තන්තුවේ දිග $l+a+x$ වන විට අංශුවේ ත්වරණය සිරස් ලෙස පහළට $\ddot{x}$ වෙයි. එවිට තන්තුවේ ආතතිය T නම් $F = ma$ යෙදීමෙන්,

$$\downarrow mg - \frac{\lambda}{l}(a+x) = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{\lambda}{l}a - \frac{\lambda}{l}x = m\ddot{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1)න් සහ (2)න් $\Rightarrow -\frac{\lambda}{l}x = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{\lambda}{ml}\right)x$$

(1)න් $\frac{\lambda}{ml} = \frac{g}{a}$ වන බැවින්, $\ddot{x} = -\left(\frac{g}{a}\right)x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$; මෙහි $-a \le x \le b$ වන සේ තන්තුව ඇදී පවතින විට P අංශුව සරල අනුවර්තීව චලිත වන අතර චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x = 0$ වන C ලක්ෂ්‍යයයි.

(3) හි විසඳුම $x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$ යයි උපකල්පනය කළ විට,

$t = 0$ දී $x = b$ වන නිසා, $b = A(1) + B(0) \Rightarrow A = b$

t වි. අ. කි, $\dot{x} = -A\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$

$t = 0$ දී $\dot{x} = 0$ වන නිසා,

$0 = A(0) + B(1) \Rightarrow B = 0$ දී

$$\therefore x = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

තන්තුව හැකිලෙන තෙක් අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදේ. තන්තුව හැකිලෙන විට $t = t_0$ සහ $x = -a$ වෙයි.

එවිට, $-a = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$

$$-\frac{a}{b} = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad -\sin\alpha = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0 = \frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P ඉවත් වන විට $t = t_0$ සහ $\dot{x} = -v$ යයි ගනිමු. මෙහිදී P අංශුව උඩු අතට චලිත වෙයි.

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

$$-v = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$

$$v = b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_0}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{b^2-a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{a}\square b^2 - a^2 \square}$$

තන්තුව හැකිලීමෙන් පසු P අංශුව v ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ලෙස ඉහළට චලිත වෙයි. අංශුව ඉහළ නගින උපරිම උස h යයි ගනිමු. එවිට, $\square v^2 = \square^2 + 2a\square$ යෙදීමෙන්,

$$0 = v^2 - 2g\square \Rightarrow \square = \frac{v^2}{2g}$$

$$\square = \frac{g}{a}\,\frac{\square b^2 - a^2}{2g} \square \frac{\square b^2 - a^2 \square}{2a}$$

$\square\square$ l නම් P අංශුව සීලිමේ වදියි.

එනම්, $\frac{\square b^2 - a^2 \square}{2a} \square\square$

$$b^2 \square a^2 + 2a\square$$

$$b^2 \square a^2 + 2a\frac{\square a}{\square g}$$

$$b^2 \square a^2 + \frac{2a^2\square}{\square g}$$

$$b^2 \square a^2\left(1+\frac{2\square}{\square g}\right)$$

$$b \square a\sqrt{1+\frac{2\square}{\square g}}$$

අංශුව සීලිමේ වදින ප්‍රවේගය v_1 නම්

$$v_1^2 = v^2 - 2g\square$$

$$v_1^2 = \frac{g}{a}\square b^2 - a^2 \square 2g\left(\frac{\square a}{\square g}\right)$$

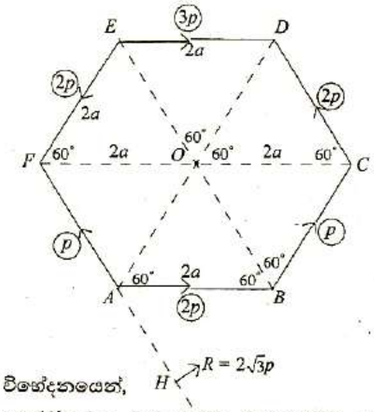
$$= \frac{g}{a}\square b^2 - a^2 - \frac{2\square a^2}{\square a}\square$$

$$= \frac{g}{a}\square b^2 - \left(1+\frac{2\square}{\square a}\right)a^2\square$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{a}\square b^2 - \left(1+\frac{2\square}{\square a}\right)a^2\square}$$

$v_1 \square 0$ වීමට $b \square a\sqrt{1+\frac{2\square}{\square a}}$ විය යුතුය.

5. (a)



බල පද්ධතිය තිරස් විභේදනයෙන්,

$$\rightarrow X = 2p + p\cos 60^\circ + 3p - 2p\cos 60^\circ - 2p\cos 60^\circ - p\cos 60^\circ$$
$$= 5p - 4p\cos 60^\circ$$
$$= 3p$$

සිරස් විභේදනයෙන්,

$$\uparrow Y = p\sin 60^\circ + 2p\sin 60^\circ - 2p\sin 60^\circ + p\sin 60^\circ$$
$$= 2p\sin 60^\circ$$
$$= \sqrt{3}p$$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}$$
$$= \sqrt{(3p)^2 + (\sqrt{3}p)^2}$$
$$= \sqrt{12p^2}$$
$$= 2\sqrt{3}p\ N$$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය AB ට θ කෝණයක් ආනත යයි ගනිමු.

එවිට, $\tan\theta = \frac{Y}{X}$

$$= \frac{\sqrt{3}p}{3p}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \tan 30^\circ$$
$$\therefore \theta = 30^\circ$$

එවිට, R සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC ට සමාන්තරය බල පද්ධතියට A වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$$\overset{\curvearrowleft}{A}\ G = p.2a\sin 60^\circ + 2p.4a\sin 60^\circ - 3p.4a\sin 60^\circ + 2p.2a\sin 60^\circ$$
$$= pa\sqrt{3} + 4pa\sqrt{3} - 6pa\sqrt{3} + 2pa\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}pa\ \ Nm$$

එවිට සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC ඔස්සේ $2\sqrt{3}p\ N$ බලයක් වන අතර $\sqrt{3}pa\ Nm$ වාමාවර්ත අතට වූ බල යුග්මයකින්ද සමන්විතය. තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට බල පද්ධතිය තුල්‍ය වන විට, එමගින් FA පාදය H හිදී කපන්නේ යයි ගනිමු.

A වටා සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ඝූර්ණය $= 2\sqrt{3}p\,.\,AH \curvearrowright$

A වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය $= \sqrt{3}pa \curvearrowleft$

A වටා සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ඝූර්ණය $= A$ වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය

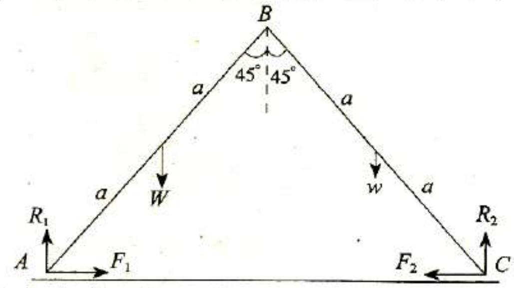
එවිට, $2\sqrt{3}p\,.\,AH = \sqrt{3}pa$

$$AH = -\frac{a}{2}$$

ඒ අනුව $2\sqrt{3}pa$ සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC ට සමාන්තරව දික් කරන ලද FA රේඛාව $\frac{a}{2}$ දුරකදී කපන H හරහා වැටී ඇත.

H හරහා $\overline{CA}$ දිශාවට $2\sqrt{3}p\ N$ බලයක් බල පද්ධතියට යෙදූ විට, සමතුලිත වේ.

(b)



පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සලකමු.

$$\rightarrow\ ;\ F_1 - F_2 = 0$$
$$F_1 = F_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\uparrow\ ;\ R_1 + R_2 - W - w = 0$$
$$R_1 + R_2 = W + w \ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\overset{\curvearrowleft}{A}\ ;\ R_2.4a\sin 45^\circ - W.a\sin 45^\circ - w3a\sin 45^\circ = 0$$
$$R_2 = \frac{W+3w}{4} \ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) සහ (3) න් $R_1 = W + w - R_2$

$$= W + w - \frac{W+3w}{4}$$
$$= \frac{3W+w}{4}$$
$$R_1 - R_2 = \frac{3W+w}{4} - \frac{W+3w}{4} = \frac{2W-2w}{4} = \frac{W-w}{2}$$

$W > w$ නිසා $R_1 - R_2 > 0 \Rightarrow R_1 > R_2$ නිසා

$\therefore \frac{F_1}{R_1} < \frac{F_2}{R_2}$ වෙයි.

පද්ධතිය සමතුලිතවීමට $\frac{F_2}{R_2} \le \mu$ විය යුතුය. F_2 සෙවීමට BC දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා B වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$$\overset{\curvearrowleft}{B}\ ;\ R_2.2a\sin 45^\circ - F_2.2a\sin 45^\circ - w.a\sin 45^\circ = 0$$
$$2R_2 - 2F_2 - w = 0$$
$$2F_2 = 2R_2 - w$$
$$= \frac{W+3w}{2} - w$$
$$= \frac{W+w}{2}$$
$$\therefore F_2 = \frac{W+w}{4}$$

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{\frac{W+w}{4}}{\frac{W+3w}{4}} = \frac{W+w}{W+3w}$$

පද්ධතිය සමතුලිතවීමට $\frac{F_2}{R_2} \le \mu$. එනම් $\frac{W+w}{W+3w} \le \mu$

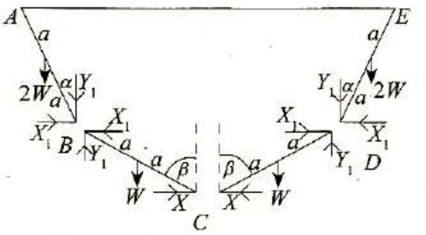
ඒ අනුව පද්ධතිය සමතුලිතවීමට μ ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය $\dfrac{W+w}{W+3w}$ වෙයි.

$\mu = \dfrac{W+w}{W+3w}$ නම්, $\dfrac{F_2}{R_2} = \mu$ වෙයි. එනම්, $\dfrac{F_1}{R_1} < \dfrac{F_2}{R_2} = \mu$

මෙහිදී $\dfrac{F_1}{R_1} < \mu$ ද, $\dfrac{F_2}{R_2} = \mu$ ද නිසා පළමුව ලිස්සන්නේ C හි දී ය.

---

6. (a)



C හරහා වූ සිරස් රේඛාව වටා පද්ධතිය සමමිතික වෙයි. එවිට C හිදී ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් දිශාවට ක්‍රියා කරයි. C හි දී ප්‍රතික්‍රියාව X යැයි ගනිමු. B සහ D හි දී ප්‍රතික්‍රියා රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට X_1, Y_1 තිරස් සහ සිරස් සංරචක මඟින් ලකුණු කරමු. සමමිතික බව සැලකීමෙන් B සහ D හි දී ප්‍රතික්‍රියා සමාන වෙයි.

BC දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා B වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

$$X.2a\cos\beta - W.a\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{W}{2}\tan\beta$$

$$\rightarrow X - X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = X = \frac{W}{2}\tan\beta$$

$$\uparrow \; Y_1 - W = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_1 = W$$

AB දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සලකා A වටා ඝූර්ණය ගනිමු.

A, $X_1.2a\cos\alpha - Y_1.2a\sin\alpha - 2W.a\sin\alpha = 0$

$$X_1\cos\alpha - Y_1\sin\alpha = W\sin\alpha$$

$X_1 = \dfrac{W}{2}\tan\beta$ සහ $Y_1 = W$ ආදේශයෙන්,

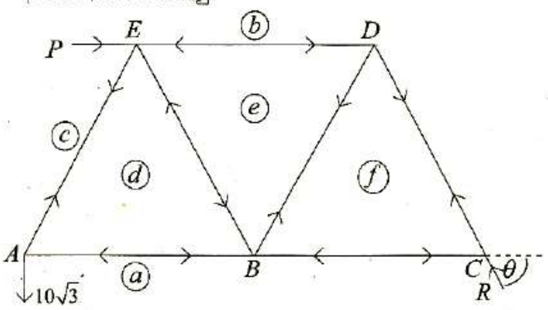
$$\frac{W}{2}\tan\beta.\cos\alpha - W\sin\alpha = W\sin\alpha$$

$\cos\alpha$ වලින් බෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}\tan\beta = 2\tan\alpha$$

$$\tan\beta = 4\tan\alpha$$

(b) දණ්ඩක දිග $2d$ යයි ගනිමු. C හිදී අසවුවේ ප්‍රතික්‍රියාව තිරසට θ ආනතව, R යයි ගනිමු.



(i) C වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

C, $10\sqrt{3}.4d - P.2d\sin 60^\circ = 0$

$$P = 40N$$

(ii) $\leftarrow R\cos\theta - 40 = 0$

$$R\cos\theta = 40 \text{............(1)}$$

$\uparrow R\sin\theta - 10\sqrt{3} = 0$

$$R\sin\theta = 10\sqrt{3} \text{............(2)}$$

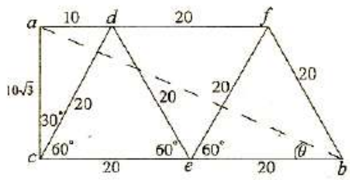
$\dfrac{(2)}{(1)}$; $\quad \dfrac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \dfrac{10\sqrt{3}}{40} \quad \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$(1)^2 + (2)^2$; $\quad R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 40^2 + (10\sqrt{3})^2$

$$= 1600 + 300$$

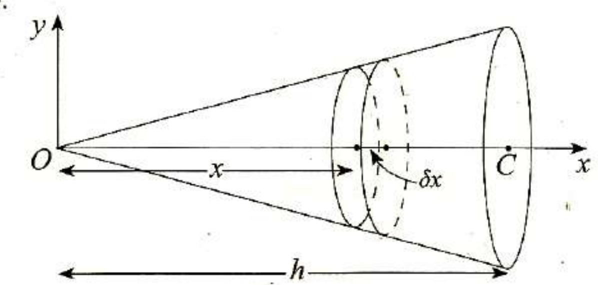
$$= 1900$$

$$R^2 = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19}$$



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	තෙරපුම	10N
BC	තෙරපුම	30N
CD	තෙරපුම	20N
DE	තෙරපුම	20N
EA	ආතතික	20N
EB	තෙරපුම	20N
DB	ආතතික	20N

7.



කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි OC අක්ෂය මත පිහිටයි. OC ඔස්සේ x අක්ෂය ගනිමු. කේතුවේ අර්ධ ශීර්ෂ කෝණය α යයි ද, O සිට x දුරින් වූ ද පළල δx වූද තුනී තැටියක් සලකමු.

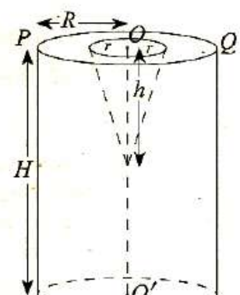
තැටියේ අංශු මාත්‍ර ස්කන්ධ $\delta m = \pi\,(x\tan\alpha)\,\delta x\rho$

ρ යනු කේතුවේ ඝනත්වයයි.

O සිට කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\overline{x}$ වන විට O වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන්,

$$\overline{x} = \frac{\int_0^h x\pi(x\tan\alpha)^2 dx\rho}{\int_0^h \pi(x\tan\alpha)^2 dx\rho}$$

$$= \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h} = \frac{h^4/4}{h^3/3} = \frac{3h}{4}$$



එවිට C ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර

$$= h - \frac{3h}{4}$$

$$= \frac{h}{4}$$

සමමිතික බව සැලකීමෙන් අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OO' අක්ෂය මත පිහිටයි.

සිලින්ඩරයේ ස්කන්ධය $= \pi R^2 H \rho$

කුහරය සෑදීමට ඉවත් කරන ලද කේතුවේ ස්කන්ධය $= \frac{1}{3}\pi r^2 h \rho$

සිලින්ඩරයේ සහ කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රවලට PQ සිට දුර පිළිවෙළින් $\frac{H}{2}$ සහ $\frac{h}{4}$ වෙයි. අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\overline{x}$ යයි ගනිමු.

O; $(\pi R^2 H\rho - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho)\overline{x} = (\pi R^2 H\rho).\left(\frac{H}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho\right).\frac{h}{4}$

O; $$\overline{x} = \frac{(\pi R^2 H\rho).\left(\frac{H}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho\right).\frac{h}{4}}{\pi R^2 H\rho - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho}$$

$$= \frac{\left(\frac{R^2H^2}{2}\right) - \left(\frac{r^2h^2}{12}\right)}{R^2H - \frac{1}{3}r^2h}$$

$$= \frac{\square R^2H^2 - r^2h^2}{12} \square \frac{3}{3R^2H - r^2h}$$

$$= \frac{\square R^2H^2 - r^2h^2}{4(3R^2H - r^2h)}$$

$R = 2r$ සහ $\overline{x} = h$ වන විට,

$$h = \frac{\square(4\cdot^2)H^2 - r^2h^2}{4\left[3(4r^2)H - r^2h\right]} = \frac{24r^2H^2 - r^2h^2}{4\square r^2H - 4r^2h}$$

$$(4\square r^2H - 4r^2h)h = 24r^2H^2 - r^2h^2$$

$$4\square Hh - 4h^2 = 24H^2 - h^2$$

$$3h^2 - 4\square Hh \square 24H^2 = 0$$

$$h^2 - 1\square Hh \square \square H^2 = 0$$

$$(h - \square H)^2 = \square 4H^2 - \square H^2$$

$$(h - \square H)^2 = \square H^2$$

$$h - \square H = \square 2\sqrt{14}H$$

$$h = \square H \square 2\sqrt{14}H$$

$h \square H$ නිසා $h = \square H \square 2\sqrt{14}H$ පිළිගත නොහැකිය.

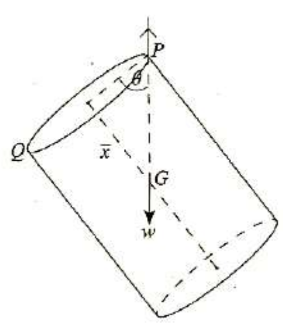
එබැවින් $h = \square H - 2\sqrt{14}H$

$$h = 2(4 - \sqrt{14})H$$

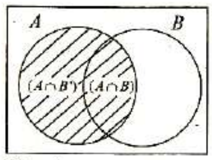
P හරහා සිරස් රේඛාව G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන අතර PQ හි සිරසට ආනති θ වන විට

$\tan\square = \frac{\overline{x}}{R}$, $h = 3R$ නම් $\tan\square = \frac{h}{2r} = \frac{2(4-\sqrt{14}).3r}{2r} = 3(4-\sqrt{14})$

$\therefore \square = \tan^{-1}\left[3(4-\sqrt{14})\right]$



8. (a)



$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$\therefore$ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$...........(1)

$(A \cup B) = (A \cap B') \cup (B)$;

$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B)$; $B \cap (A \cap B') = \phi$

$\therefore$ $P(A \cap B') = P(A \cup B) - P(B)$

(1) ට ආදේශයෙන්, $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A හා B ස්වායත්ත විචල්‍ය නම්, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A) \times P(B)$

$= P(A)[1 - P(B)]$

$= P(A) \times P(B')$

$\therefore$ A සහ B' සිද්ධි ස්වායත්ත වෙයි.

(ii) $P(A' \cap B') = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$P(A' \cap B') = P(A') - P(B) + P(A) \times P(B)$

$= P(A') - P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B) \times P(A')$

$= P(A')[1 - P(B)]$

$= P(A') \times P(B')$

$\therefore A'$ සහ B' ස්වායත්ත සිද්ධි වෙයි.

N : X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවෙකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම.

A : X පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම.

B : Y පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම.

AB: X සහ Y යන දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක්වීම.

X ආබාධයකට ලක්වීමේ සිද්ධිය C වන විට $P(C) = 0.2$

Y ආබාධයකට ලක්වීමේ සිද්ධිය D වන විට $P(D) = 0.1$ යයි දී තිබේ.

එවිට, X ආබාධයකට ලක්නොවීමේ සම්භාවිතාව

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Y ආබාධයකට ලක්නොවීමේ සම්භාවිතාව

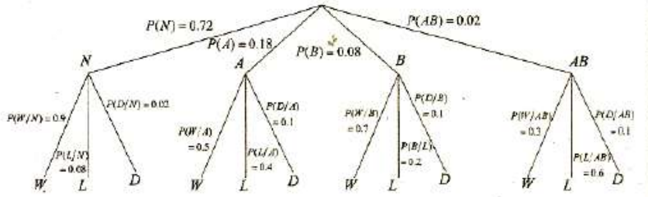
$$P(D') = 1 - P(D) = 1 - 0.1 = 0.\square$$

$P(\square) = P(C' \cap D')$
$= P(C') \times P(D')$
$= 0.8 \times 0.\square$
$= 0.\square 2$

$P(A) = P(C \cap D')$
$= P(C) \times P(D')$
$= 0.2 \times 0.\square$
$= 0.18$

$P(B) = P(C' \cap D)$
$= P(C') \times P(D)$
$= 0.8 \times 0.1$
$= 0.08$

$P(AB) = P(C \cap D)$
$= P(C) \times P(D)$
$= 0.2 \times 0.1$
$= 0.02$



W - ජය ගැනීම ; L - පරාජය වීම ; D - ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් වීම

(i) ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව

$$P(W) = P(N)\times P(W/N) + P(A)\times P(W/A) + P(B)\times P(W/B) + P(AB)\times P(W/AB)$$
$$= 0.72\times 0.9 + 0.18\times 0.5 + 0.08\times 0.7 + 0.02\times 0.3$$
$$= 0.648 + 0.090 + 0.56 + 0.006$$
$$= 0.8$$

(ii) තරඟාවලිය පරාජය වීමේ සම්භාවිතාව

$$P(L) = P(N)\times P(L/N) + P(A)\times P(L/A) + P(B)\times P(L/B) + P(AB)\times P(L/AB)$$
$$= 0.72\times 0.8 + 0.18\times 0.4 + 0.08\times 0.2 + 0.02\times 0.6$$
$$= 0.576 + 0.072 + 0.016 + 0.012$$
$$= 0.1576$$

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජය වී ඇතැයි දී ඇති විට, Y ආබාධයට ලක්වීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව,

$$P(B/L) = \frac{P(B\cap L)}{P(L)} = \frac{P(B)\times P(L/B)}{P(L)} = \frac{0.08\times 0.2}{0.1576} = \frac{0.016}{0.1576} = \frac{16}{157} = 0.1$$

---

9. (a) මධ්‍යන්‍යය $= \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

විචලතාව $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

(i) $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{38}, x_{39}, x_{40}$ යන අගයන් 40 කි. අගයන් 40 න් අගයන් දෙකක් පමණක් සාවද්‍ය ලෙස ගෙන ඇත. එම අගයන් දෙක මිලිග්‍රෑම් 65 සහ මිලිග්‍රෑම් 53 වෙයි. ඒ අනුව,

$$\overline{x} = 58 = \frac{\sum_{i=1}^{38} x_i + 65 + 53}{40}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{38} x_i = 58\times 40 - 65 - 53 = 2202$$

නිවැරදි කිරීමෙන් පසු මධ්‍යන්‍යය $\overline{x}\,'$ යයි ගනිමු. එවිට

$$\overline{x}\,' = \frac{\sum_{i=1}^{38} x_i + 63 + 55}{40} = \frac{2202 + 118}{40} = \frac{2320}{40} = 58 \qquad \therefore \quad \overline{x} = \overline{x}\,'$$

$\therefore$ වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නැත.

(ii) විචලතාව $= s^2 = (3.2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (65-58)^2 + (53-58)^2}{40}$

$$\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 = 40\times(3.2) - 49 - 25$$

නිවැරදි විචලතාව $= s'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (63-58)^2 + (55-58)^2}{40}$

$$= \frac{40\times(3.2) - 74 + 25 + 9}{40}$$
$$= \frac{40\times(3.2) - 40}{40}$$
$$= (3.2) - 1$$
$$= 2.2$$

එවිට විචලතාව අඩු වී ඇත.

---

9. (b)

මැද අගය (x)	සංඛ්‍යාතය (f)	$d = \dfrac{x-45}{10}$	fd
5	10	-4	-40
15	27	-3	-81
25	33	-2	-66
35	35	-1	-35
45	38	0	0
55	30	1	30
65	19	2	38
75	8	3	24
	200		-130

(i) මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = 45 + \left(-\dfrac{130}{200}\right)\times 10$

$$= 45 - \frac{13}{2}$$
$$= 45 - 6.5$$
$$= 38.5$$

මධ්‍යස්ථය $= l + \dfrac{\left(\dfrac{n}{2} - c\right)h}{f}$

l − මධ්‍යස්ථ පන්තියේ පහළ සීමාව = 30

h − පන්තියේ තරම = 10

f − මධ්‍යස්ථ පන්තියේ සංඛ්‍යාතය = 35

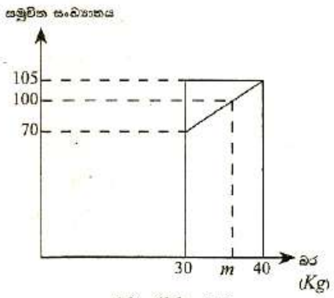
c − මධ්‍යස්ථ පන්තියට පෙර සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය = 70

මධ්‍යස්ථය $= 30 + \dfrac{100-70}{35}\times 10$

$$= 30 + \frac{300}{35} = 30 + \frac{60}{7} = 30 + 8.57 = 38.57$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$\frac{m-30}{40-m} = \frac{100-70}{105-100} = \frac{30}{5} = 6$$
$$m - 30 = 6(40 - m)$$
$$7m = 240 + 30$$
$$m = \frac{270}{7} = 38.57$$



මාතය $= l + \dfrac{h(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2} \Rightarrow$ මාතය $= 40 + \dfrac{10\times(38-35)}{2\times 38 - 35 - 30}$

$$= 40 + \frac{30}{76-65}$$
$$= 40 + \frac{30}{11} = 40 + 2.727 = 42.73$$

l − මාත පන්තියේ පහළ සීමාව = 40

h − මාත පන්තියේ තරම = 10

f_1 − මාත පන්තියේ සංඛ්‍යාතය = 38

f_0 − මාත පන්තියට පෙර සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය = 35

f_2 − මාත පන්තියට පසු සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය = 30

තවත් ක්‍රමයක්

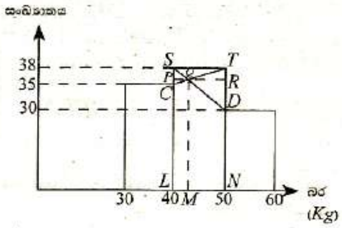
$$\frac{M-40}{50-M}=\frac{38-35}{38-30}$$

$$\left[\frac{LM}{MN}=\frac{PQ}{QR}=\frac{SC}{TD}\text{ වීම අනුව}\right]$$

$$8(M-40)=3(50-M)$$

$$11M=470$$

$$M=\frac{470}{11}=42.73$$



මධ්‍යස්ථ බර 38.5 වන බැවින් ප්‍රවාහන කළ හැකි මගීන් සංඛ්‍යාව $\frac{1500}{38.5}$ යන අගයෙන් නිර්ණය කළ හැකිය. එනම් $\frac{1500}{38.5}=38.96\simeq 39.$

මෙලෙසම, මාතය 42.73 වන බැවින් උපරිම මගීන් සංඛ්‍යාව $\frac{1500}{42.73}$ මගින් ද නිර්ණය කළ හැකිය.

$$\frac{1500}{42.73}=35.$$

අගයන් දෙකෙන් වඩා කුඩා අගය වන 35 අගය පිළිගත හැකි වන අතර අරක්ෂිතව යා හැකි මගීන් ගණන 35 ලෙස තීරණය කළ හැකිය.

(ii)

මැද අගය (x)	සංඛ්‍යාතය (f)	$d=\frac{x-45}{10}$	fd	fd^2
5	10	−4	−40	160
15	27	−3	−81	243
25	33	−2	−66	132
35	35	−1	−35	35
45	38	0	0	0
55	30	1	30	30
65	19	2	38	76
75	8	3	24	72
	200		−130	748

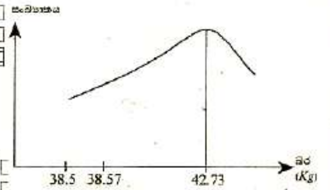
$$\text{විචලතාව }=10^2\left[\frac{748}{200}-\left(-\frac{130}{200}\right)^2\right]$$

$$=100\left[\frac{748}{200}-\frac{130^2}{200^2}\right]$$

$$=100\left[\frac{748\times200-130^2}{200^2}\right]$$

$$=100\left[\frac{132700}{200\times200}\right]$$

$$=\frac{1327}{4}=331.75$$



සම්මත අපගමනය $=\sqrt{331.75}=18.21$

$$\text{කුටිකතා සංගුණකය }=\frac{3\text{ (මධ්‍යන්‍යය - මධ්‍යස්ථය)}}{\text{සම්මත අපගමනය}}$$

$$=\frac{3(38.5-38.57)}{18.21}$$

$$=\frac{-0.21}{18.21}=\frac{-21}{1821}=-0.0115$$

ව්‍යාප්තිය ඍණ කුටික ව්‍යාපතියකි.