සංයුක්ත ගණිතය I

පිළිතුරු

එක් එක් ප්‍රශ්නයට ලකුණු 100 බැගින්.

---

1. (a)

$y(p-x)=p+x$ වන විට, $p(y-1)=x(y+1)$

$$\therefore \quad x=\frac{p(y-1)}{(y+1)}; \qquad y\neq -1$$

$f(x)=x^2+px+q=o$ හි x වෙනුවට ඉහත අගය ආදේශ කරමු.

$$f(x)=x^2+px+q=p^2\frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}+p^2\frac{(y-1)}{(y+1)}+q=0$$

එවිට, $p^2(y-1)^2+p^2(y^2-1)+q(y+1)^2=0$

$g(y)=p^2(y-1)^2+p^2(y^2-1)+q(y+1)^2=0$ යයි ගනිමු.

එවිට, $g(y)=(2p^2+q)y^2+2(q-p^2)y+q=0$

α සහ β යනු $f(x)=x^2+px+q=o$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වන බැවින් මූල එකතුව සහ මූල ගුණිතය සැලකීමෙන්,

$\alpha+\beta=-p$ සහ $\alpha\beta=q$

$x=\alpha$ යන්න $y=\dfrac{(p+x)}{(p-x)}$ හි ආදේශයෙන්,

$$y=\frac{(p+\alpha)}{(p-\alpha)}$$
$$=\frac{-\alpha-\beta+\alpha}{-\alpha-\beta-\alpha}$$
$$=\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

මෙලෙස $x=\beta$ යන්න $y=\dfrac{(p+x)}{(p-x)}$ හි ආදේශයෙන්,

$$y=\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

එවිට, $y=\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$ යනු $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූලයකි.

$y=\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ ද, $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූලයකි.

ඒ අනුව $y=\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ සහ $y=\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$ යනු $g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක වෙයි.

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2-2\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)$$

$g(y)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල එකතුව සහ මූල ගුණිතය සැලකීමෙන්,

$$\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{2(p^2-q)}{(2p^2+q)} \quad \text{සහ}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)=\frac{q}{2p^2+q} \quad \text{වෙයි.}$$

$$\therefore \left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\left[\frac{2(p^2-q)}{2p^2+q}\right]^2-2\left(\frac{q}{2p^2+q}\right)$$
$$=\frac{4p^4-8p^2q+4q^2-4p^2q-2q^2}{(2p^2+q)^2}$$
$$=\frac{2q^2-12p^2q+4p^4}{(2p^2+q)^2}$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2(2\alpha+\beta)^2+\beta^2(2\beta+\alpha)^2}{(2\beta+\alpha)^2(2\alpha+\beta)^2}$$
$$=\frac{4(\alpha^4+\beta^4)+2\alpha^2\beta^2+4\alpha^3\beta+4\beta^3\alpha}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)^2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)=\frac{\alpha\beta}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}=\frac{q}{(2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)}=\frac{q}{2p^2+q}$$

$$\therefore \quad (2\beta+\alpha)(2\alpha+\beta)=2p^2+q$$

$$4(\alpha^4+\beta^4)+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=4\left[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\right]+2\alpha^2\beta^2$$
$$+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p^2)-2q=p^2-2q$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2=\frac{4\square(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\square+2\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{(2p^2+q)^2}$$
$$=\frac{4\square(p^2-2q)^2-2q^2\square+2q^2+4q(p^2-2q)}{(2p^2+q)}$$
$$=\frac{4p^4-\square\square p^2q+\square\square q^2-\square q^2+2q^2+4p^2q-\square q^2)}{(2p^2+q)^2}$$
$$=\frac{4p^4-\square 2p^2q+2q^2}{(2p^2+q)^2}$$

(b)

$$(y+ax)(y+bx)(y+cx)=[y^2+(a+b)xy+abx^2](y+cx)$$

$$=[y^2+(a+b)xy+abx^2](y+cx)$$
$$=y^3+(a+b)xy^2+abx^2y+cxy^2+c(a+b)x^2y+abcx^3$$
$$=y^3+(a+b+c)y^2x+(ab+bc+ca)yx^2+abcx^3$$

$(a+b+c)=0$ සහ $(ab+bc+ca)=-3m$ ආදේශයෙන්

$(y+ax)(y+bx)(y+cx)=y^3+0-3myx^2+abcx^3$

$y=x^2+m$ ආදේශයෙන්,

$$(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)(x^2+cx+m)$$
$$=(x^2+m)[(x^2+m)^2-3mx^2]+abcx^3$$
$$=(x^2+m)[x^4+2mx^2+m^2-3mx^2]+abcx^3$$
$$=x^6+2mx^4+m^2x^2-3mx^4+mx^4+2m^2x^2$$
$$+m^3-3m^2x^2+abcx^3$$
$$=x^6+abcx^3+m^3$$

$g(x)=x^6+16x^3+64$ සමීකරණයෙන් සාධක, (x^2-2x+m), (x^2+ax+m) සහ (x^2+bx+m) වන විට,

$g(x)=(x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එනම්, $x^6+16x^3+64 \equiv (x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$

මුල් කොටස සමග සැසඳීමෙන්, $m^3=64$ සහ $-2ab=16$ වෙයි.

$\therefore \quad m=4$ සහ $ab=-8$

තවද, $-2+a+b=0$ වන අතර $a+b=2$ වෙයි.

$ab=-8$ සහ $a+b=2$ සමීකරණය විසඳීමෙන් a සහ b සොයමු.

$a(2-a)=-8 \Rightarrow a^2-2a-8=0$

$\Rightarrow (a-4)(a+2)=0$

$a=4$ හෝ -2

$a=4$ දී $b=-2$ ද, $a=-2$ දී $b=4$ ද වේ

ඉහත a සහ b අගයන් ආදේශයෙන්,

(i) $g(x)=(x^2-2x+4)(x^2+4x+4)(x^2-2x+4)$

$=(x^2-2x+4)^2(x^2+4x+4)$

$=(x^2-2x+4)^2(x+2)^2$

සියලු x සඳහා $(x^2-2x+4)^2>0$ සහ $(x+2)^2\geq 0$ නිසා,

$g(x)\geq 0$ වේ.

(ii) $g(x)=(x^2-2x+4)^2(x+2)^2=0$ සමීකරණයේ මූල

$x^2-2x+4=0$ සහ $(x+2)^2=0$ සමීකරණ විසඳීමෙන් ලැබේ.

එවිට,

$$x=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i \quad \text{සහ} \quad x=-2 \quad \text{වේ.}$$

---

2. (a)

(i) දී ඇති 1, 2, 4, 5, 6, 8 සහ 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන්, පුනරාවර්තනය සහිතව සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන,

$7\times 7\times 7\times 7=2401$

(ii) පුනරාවර්තනය රහිතව සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන,

$7\times 6\times 5\times 4=840$

(i) අවස්ථාවේදී, එකම සංඛ්‍යාංකයක් තුන්වරක් ද, ඊට වෙනස් සංඛ්‍යාංකයකද ඇතුළත් වන සේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $=7\times 6=42$

ඉහත දැක්වෙන ආකාරයට, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $=\dfrac{4!}{3!}$

(එනම් සංඛ්‍යාංක හතරෙන් තුනක් සමානවන අවස්ථාව) $=4$

සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක්, සංඛ්‍යාංක 3 ක් සමානද එකක් වෙනස් ද වනසේ සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන,

$=42\times 4$

$=168$

එකම සංඛ්‍යාංකය, හතර වරක් වනසේ සංඛ්‍යා 7 ක් සෑදෙන වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන $=7$

එවිට සංඛ්‍යාංක හතරෙන්, 3 ක් සමාන වනසේ ද, 4 ක් සමාන වනසේ ද සෑදිය හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන

$=168+7$

$=175$

එකම සංඛ්‍යාංක දෙවතාවකට වඩා වැඩියෙන් නොමැති වනසේ සෑදිය හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන

$=2401-175=2226$

තවත් ක්‍රමයක්

එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යාංක සහිත සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි මුළු ගණන $=7\times 6\times 5\times 4=840$

සංඛ්‍යාංක දෙකක් සමානවද, ඉතිරි සංඛ්‍යාංක දෙක අසමානද වනසේ දී ඇති සංඛ්‍යාවලින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$$={}^7C_1\times {}^6C_2=\frac{7\times 6\times 5}{1\times 2}=105$$

සංඛ්‍යාංක 4 ක, එවැනි සංඛ්‍යාවක් වෙනස් පිළියෙළ කිරීමේ කළ හැකි ආකාර ගණන $=\dfrac{4!}{2!}=4\times 3=12$

එවිට සංඛ්‍යාංක 4 ක, එවැනි සංඛ්‍යා සෑදිය හැකි ගණන $=105\times 12$

$=1260$

වෙනස් සංඛ්‍යාංක දෙකක් සමාන ඒවා දෙක බැගින් වන සේ ගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $={}^7C_2=\dfrac{7\times 6}{1\times 2}=21$

එවැනි සංඛ්‍යාවක් වෙනස් පිළියෙල කිරීම් කළ හැකි ආකාර ගණන

$$=\frac{4!}{2!\,2!}$$

$=6$

මේ ආකාරයට සකස් කළ හැකි මුළු සංඛ්‍යා ගණන $=21\times 6$

$=126$

එකම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා නොමැති වනසේ සංඛ්‍යාංක හතරේ වෙනස් සංඛ්‍යා මුළු ගණන $=840+1260+126$

$=2226$

(ii) අවස්ථාවේදී, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 සංඛ්‍යාංකවල ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 3 ක් ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක 4 ක් ද ඇත.

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක්ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක දෙකක්ද වනසේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $={}^3C_2\times {}^4C_2$

$=3\times 6$

$=18$

ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 2ක් සහ ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක 2ක සංඛ්‍යාවක සංඛ්‍යාංක හතරම එකිනෙකට අසමාන වන බැවින් එවැනි සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $=4!$

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 2 ක් සහ ඉරට්ට සංඛ්‍යාංක දෙකක් සහිතව සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $=18\times 4!$

$=432$

සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යාවක් ඉරට්ටේ වීමට, අවසාන සංඛ්‍යාංකය ඉරට්ට විය යුතුය. එබැවින් අවසාන සංඛ්‍යාව ඉරට්ට වන සේ සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා ගණන $={}^4C_1$

$=4$

සංඛ්‍යාංක 4 න් දෙකක ඔත්තේ ද, තවත් එකක් ඉරට්ටේ ද වන සේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $={}^3C_2\times {}^3C_1$

$=9$

සංඛ්‍යාංක 2 ක් ඔත්තේ ද, එකක් ඉරට්ට ද, අවසාන සංඛ්‍යාංකය ඉරට්ට ද වනසේ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $=9\times 4$

$=36$

මෙම එක් සංඛ්‍යාවක් පිළියෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන $=3!$

එබැවින් ඔත්තේ සංඛ්‍යා 2 ක් ද, ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක් ද ඇති සංඛ්‍යාවක
වෙනස් ඉරට්ට සංඛ්‍යා මුළු ගණන $= 36 \times 3!$

$= 216$

(b)

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_rx^r + \dots {}^nC_nx^n$$

$$(1+x)^{n-1} = {}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1x + {}^{n-1}C_2x^2 + \dots + {}^{n-1}C_rx^r + \dots {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1}$$

$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$ වන බැවින්,

$${}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_rx^r + \dots {}^nC_nx^n$$

$$= (1+x)[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1x + {}^{n-1}C_2x^2 + \dots + {}^{n-1}C_rx^r + \dots {}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1}]$$

$$= {}^{n-1}C_0 + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0)x + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1)x^2 + \dots$$

$$+ ({}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1})x^r + \dots {}^{n-1}C_{n-1}x^n$$

x^r පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්,

$${}^nC_r = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} \quad ; \quad r = 1, 2, \dots\dots, \text{n - 1}$$

${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots\dots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$ සෙවීම,

$${}^nC_1 = {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0$$

$${}^nC_2 = {}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1$$

$${}^nC_3 = {}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$${}^nC_{n-2} = {}^{n-1}C_{n-2} + {}^{n-1}C_{n-3}$$

$${}^nC_{n-1} = {}^{n-1}C_{n-1} + {}^{n-1}C_{n-2}$$

$$\therefore\ {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots\dots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$$

$$= 1 - ({}^{n-1}C_1 + 1) + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1) - ({}^{n-1}C_3 + {}^{n-1}C_2) + \dots$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1}\,{}^{n-1}C_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$$

$$= 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n = 0; \qquad {}^nC_n = 1, \qquad {}^{n-1}C_{n-1} = 1$$

සත්‍යාපනය කිරීම

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_rx^r + \dots {}^nC_nx^n$$

$x = -1$ යෙදීමෙන්,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots + (-1)^r\,{}^nC_r + \dots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n$$

n ඉරට්ට වන විට ඉහත සම්බන්ධතාව අනුව,

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots - {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \dots + {}^nC_{n-1}x^{n-1} + \dots {}^nC_nx^n$ හි

$x = 1$ ආදේශයෙන්,

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_{n-1} + \dots {}^nC_n \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2);\ \ 2\,{}^nC_0 + 2\,{}^nC_2 + 2\,{}^nC_4 + \dots + 2\,{}^nC_n = 0 + 2^n$$

$$\therefore \quad {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots + {}^nC_n = 2^{n-1}$$

---

3. $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \equiv n^4 - (n-1)^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$n = 1$ වන විට,

වම් පැත්ත $= 4(1) - 6(1) + 4(1) - 1 = 1$

දකුණු පැත්ත $= 1^4 - (1-1)^4 = 1$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$\therefore\ n = 1$ වන විට, ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි.

$n = p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $4p^3 - 6p^2 + 4p - 1 \equiv p^4 - (p-1)^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$

(1) හි වම්පැත්තට $n = p+1$ ආදේශ කළ විට,

වම්පැත්ත $= 4(p+1)^3 - 6(p+1)^2 + 4(p+1) - 1$

$$= 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4 - 6p^2 - 12p - 6 + 4p + 4 - 1$$

$$= 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

$$= (p+1)^4 - p^4$$

= දකුණු පැත්ත

$n = p+1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි.

එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන ක්‍රම මූලධර්ම අනුව n හි ඕනෑම ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$r = 1, 2, \dots\dots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1 = r^4 - (r-1)^4$

එවිට, $u_r = r^4$ වෙයි.

$$u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$$

$$r = 1;\ \ u_1 - u_0 = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 1$$

$$r = 2;\ \ u_2 - u_1 = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 4(2) - 1$$

$$r = 3;\ \ u_3 - u_2 = 4(3)^3 - 6(3)^2 + 4(3) - 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r = n-1;\ \ u_{n-1} - u_{n-2} = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

$$r = n;\ \ u_n - u_{n-1} = 4(n)^3 - 6(n)^2 + 4(n) - 1$$

$$\therefore u_n - u_0 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots n^2)$$

$$+ 4(1 + 2 + 3 + 4 \dots\dots n) - n$$

$$n^4 = 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - 6\left(\sum_{r=1}^{n} r^2\right) + 4\left(\sum_{r=1}^{n} r\right) - n$$

$$= 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

$$= 4\left(\sum_{r=1}^{n} r^3\right) - n(n+1)(2n+1) + 2n^2 + n$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}\left[n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n^2 - n\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}\left[n^4 + (n^2 + n)(2n+1) - 2n^2 - n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n - 2n^2 - n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$= \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \dots\dots$ ශ්‍රේණියේ,

r වන පදය $v_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots\dots + r^2$

$$= \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$
$$= \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n} r$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12}$$
$$= \frac{n(n+1)}{12}[n(n+1) + (2n+1) + 1]$$
$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[n^2 + 3n + 2\right]$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+1)}{12}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} v_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \to \infty$$

v_r පදය r වන පදය වන ශ්‍රේණියේ අනන්තයට ඓක්‍යය අපරිමිත වන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \ldots\ldots$$ ශ්‍රේණියේ

r වන පදය $w_r = \dfrac{(2r+1)}{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+r^2}$

$$= \frac{(2r+1)}{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}}$$
$$= \frac{6(2r+1)}{r(r+1)(2r+1)}$$
$$= \frac{6}{r(r+1)}$$
$$= 6\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$
$$= 6[f(r) - f(r+1)]$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{1}{r}$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} w_r = 6\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$
$$= 6\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$= 6\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} S_n = \lim_{n\to\infty} 6\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$$
$$= 6[1 - 0]$$
$$= 6$$

S_n හි අගය පරිමිත බැවින් මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරීවෙයි.

---

4. (a) $z = x + iy$ යයි ගනිමු.

එවිට $z + a = (x+a) + iy$ සහ $z - a = (x-a) + iy$ වෙයි.

$|z+a| = |z-a|$ වන විට

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$(x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$$
$$4ax = 0$$
$$\therefore x = 0$$

එවිට $z = iy$ වෙයි.

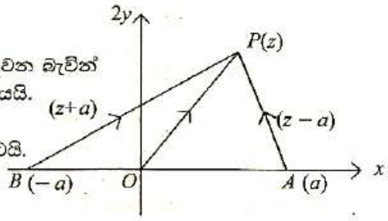
එවිට z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය ආර්ගන් තලයේ අතාත්වික අක්ෂ යයි.

තවත් ක්‍රමයක් (ජ්‍යාමිතික ක්‍රමය)

$|z+a| = |z-a|$ වන විට

$BP = AP$

APB ත්‍රිකෝණය සමද්විපාදවන බැවින් OP යනු ලම්බ සමච්ඡේදකයයි. එවිට, P ලක්ෂයට iy අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි.



$|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන විට $\left|\dfrac{z_1}{z_2} - 2\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2} + 2\right|$

(a) කොටස අනුව $\dfrac{z_1}{z_2}$ ලක්ෂ්‍යය අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි.

එවිට $i\dfrac{z_1}{z_2}$ ලක්ෂ්‍යය තාත්විකඅක්ෂය මත පිහිටයි.

k තාත්වික සංඛ්‍යාවක් වන විට $i\dfrac{z_1}{z_2} = k$ ආකාරය ලිවිය හැකිය.

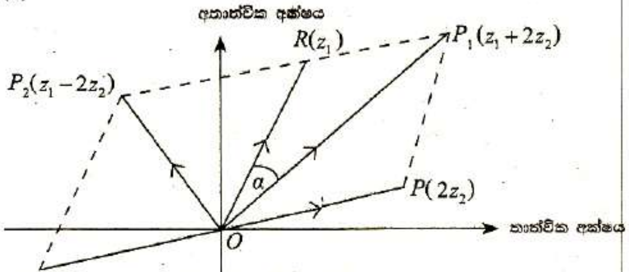
(i) $\dfrac{z_1}{z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටන බැවින්

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

වෙයි. $\dfrac{\pi}{2}$ හි ධන අගය අතාත්වික අක්ෂයේ ධන පැත්තේ ද සෘණ අගය අතාත්වික අක්ෂයේ සෘණ පැත්තේ ද පිහිටයි.

එවිට, $\left|\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right| = |\arg z_1 - \arg z_2| = \dfrac{\pi}{2}$

(ii)



$|z_1+2z_2| = |z_1-2z_2|$ වන විට $OP_1 = OP_2$

OP_1P_2 ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද වන අතර $OP = |2z_2| = OQ$ නිසා

$RP_2 = RP_1$ වෙයි. එවිට OR යනු P_1P_2 හි ලම්බ සමච්ඡේදකයයි.

එවිට, $O\hat{R}P_1 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan\alpha = \frac{RP_1}{OR} = \frac{OP}{OR} = \frac{|2z_2|}{|z_1|} = \frac{2}{|k|} \quad \left(i\frac{z_1}{z_2} = k \text{ නිසා}\right)$$

OP_1 සහ OP_2 ලම්බ නොවේ නම් $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$ සහ $\tan\alpha \neq \tan\dfrac{\pi}{4} (\neq 1)$

$$\therefore \frac{2}{|k|} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad |k| \neq 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2.\frac{2}{|k|}}{1-\frac{2}{k^2}} = \frac{4|k|}{k^2-4}$$

$$\therefore \quad P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$$

තවත් ක්‍රමයක්

$$P_1\hat{O}P_2 = |\arg(z_1-2z_2) - \arg(z_1+2z_2)|$$

$$= \left|\arg\frac{z_1-2z_2}{z_1+2z_2}\right|$$

$z_1 = -ikz_2$ නිසා

$$P_1\hat{O}P_2 = \left|\arg\frac{-ikz_2-2z_2}{-ikz_2+2z_2}\right| = \left|\arg\frac{-ik-2}{-ik+2}\right|$$

$$= \left|\arg\frac{-(2+ik)(2+ik)}{(2-ik)(2+ik)}\right|$$

$$= \left|\arg\frac{(k^2-4)-4ik}{4+k^2}\right|$$

$$\therefore \quad P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$$

OP_1 සහ OP_2 ලම්බ වේ නම් $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$\tan\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{2}{|k|}$ නිසා $|k| = 2, \qquad \therefore\ k = \pm 2$

---

5. (a) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} + \lim_{x\to 0} 3.\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= \lim_{2x\to 0} 8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + \lim_{3x\to 0} 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 8\left(\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + 3\left(\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 8\times 1 + 3\times 1$$

$$= 11$$

මෙහි $\displaystyle\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$ සහ $\displaystyle\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$

(b)(i) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ සහ $z = \tan^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1+x^2-2\sqrt{1+x^2}+1} \times \frac{x.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)} \times \frac{x^2-(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$z = \tan^{-1}x$ නිසා $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2(1+x^2)} \times (1+x^2) = \frac{1}{2}$$

තවත් ක්‍රමයක් [5. (b) (i)]

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ සහ $z = \tan^{-1}x$

$x = \tan z$ ආදේශයෙන්,

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec z - 1}{\tan z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos z}{\sin z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}$$

(b) (ii)

$y = e^{m\sin^{-1}x}$; x විෂයයෙහි අවකලනය කිරීමෙන්,

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{d}{dx}(m\sin^{-1}x)$$

$$= e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = m\,e^{m\sin^{-1}x} = my$$

නැවත x විෂයයෙහි අවකලනය කිරීමෙන්,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{dy}{dx} = m\frac{dy}{dx}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - m\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} - m^2y = 0 \text{.................................(1)}$$

(1) සමීකරණය නැවත x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්,

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 2x.\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - m^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 3x.\frac{d^2y}{dx^2} - (1\square m^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$x = 0$ වන විට $y = 1\square\square$ $\quad \frac{dy}{dx} = m\square$ $\quad \frac{d^3y}{dx^3} = m\,1(\square m^2)$

(c) වෘත්තයේ පරිධිය x යයි දී තිබෙන බැවින් සමචතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $l - x$ ද, පාදයක දිග $\frac{l-x}{4}$ ද වෙයි. තවද වෘත්තයේ අරය $\frac{x}{2\pi}$ වෙයි.

එවිට වෘත්තයේ සහ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵල වල ඓක්‍යය

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{l-x}{4}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2(l-x).(-1)}{16}$$

$$= \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-x)}{8} = \frac{4x - \pi l + \pi x}{8\pi} = \frac{(4+\pi)x - \pi l}{8\pi}$$

$\frac{dA}{dx} = 0$ වන විට, $\quad x = \frac{\pi l}{\pi + 4}$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\pi+4}{8\pi}\left[x - \frac{\pi l}{\pi+4}\right]$$

$x < \frac{\pi l}{\pi+4}$ දී $\quad \frac{dA}{dx} < 0$

$x > \frac{\pi l}{\pi+4}$ දී $\quad \frac{dA}{dx} > 0$

එවිට $x = \frac{\pi l}{\pi+4}$ යනු A හි අවම අගයයි.

වෘත්තයේ විෂ්කම්භය $= \frac{x}{\pi} = \frac{l}{\pi+4}$ ද,

සමචතුරස්‍රයේ පාදයක දිග $= \frac{l-x}{4} = \frac{1}{4}\left[l - \frac{\pi l}{\pi+4}\right] = \frac{l}{\pi+4}$ වේ.

එනම් A අවම වන විට, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයත්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක දිගත් සමාන වේ.

---

6. (a) $$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} \equiv \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

$$2x \equiv (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x^2)(1+x) + D(1+x^2)$$

$x = -1$ දී, $\quad -2 = 2D \Rightarrow D = -1$........................(1)

x^3 පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්;

$A + C = 0$..........................(2)

$x = 0$ දී, $\quad B + C + D = 0$..........................(3)

x^2 පදයේ සංගුණකය සැසඳීමෙන්;

$2A + B + C + D = 0$..........................(4)

(3) සහ (4) න් $B + C + D$ ඉවත් කරමු. එවිට $A = 0$

(2) න්, $C = -A = 0$

(3) න්, $B = -C - D = 0 + 1 = 1$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{1+x} + k$$

---

6. (b)(i) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන්,

$$I = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int a.e^{ax}\frac{\sin bx}{b}\,dx$$

$$bI = e^{ax}\sin bx - aJ$$

$$bI + aJ = e^{ax}\sin bx \text{..................................(1)}$$

(ii) $J = \int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \int a.e^{ax}\frac{\cos bx}{b}\,dx$$

$$bJ - aI = -e^{ax}\cos bx$$

$$aI - bJ = e^{ax}\cos bx \text{..................................(2)}$$

$(1)\times b + (2)\times a;$ $\quad I(a^2+b^2) = ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx$

$$I = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$(1)\times a - (2)\times b$ $\quad J = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)}(a\sin bx - b\cos bx)$

(c) $x^3t + 1 = 0$, ආදේශ කළ විට, $x^3 = -\frac{1}{t}$ වෙයි.

$x^3t + 1 = 0$, x විෂයයෙන් අවකලනය කළ විට,

$$3x^2t + x^3\frac{dt}{dx} = 0$$

$$3t\,dx = -x\,dt \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{3t}$$

$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)}$ අනුකලයේ $x = -1$ වන විට $t = 1$ ද, $x = -\frac{1}{2}$ වන

විට $t = 8$ ද වේ.

$$I = \int_1^8 \frac{-\dfrac{dt}{3t}}{\left(-\dfrac{1}{t}-1\right)} = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dt}{(t+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(t+1)\right]_1^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln 9 - \ln 2\right]$$

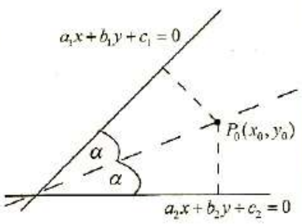
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{9}{2}$$

---

7. (a) $P_0(x_0, y_0)$ යනු දී තිබෙන රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකි.

$P_0(x_0, y_0)$ සිට $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ රේඛාවට

අඳින ලද ලම්බ දුර $= \dfrac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$



$P_0(x_0, y_0)$ සිට $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ රේඛාවට අඳින ලද ලම්බ දුර

$$= \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$P_0(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යය කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටන බැවින්,

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(x_0, y_0) වෙනුවට (x, y) යෙදීමෙන්,

$$\therefore \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

යනු රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය වේ.

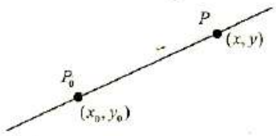
---

7. (b) $P_0P = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = t$ නිසා,

$x - x_0 = at$ සහ $y - y_0 = bt$ වෙයි.

$\therefore P_0P = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)t^2}$

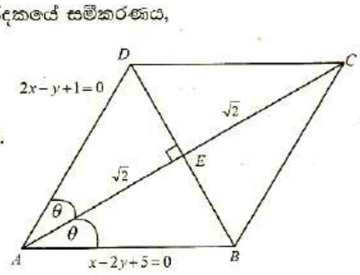


$a^2 + b^2 = 1$ යැයි දී තිබේ. එබැවින් $P_0P = |t|$

---

7. (c) AC කෝණ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය,

$$\frac{2x - y + 1}{5} = \pm\frac{x - 2y + 5}{5}$$



යන සරල රේඛා දෙකින් එකකි.

එනම් $x + y - 4 = 0$ හෝ

$y - x - 2 = 0$ වේ.

තවද $2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ නිසා $\theta < \dfrac{\pi}{4}$

AD සහ $y - x - 2 = 0$ අතර කෝණය සළකමු.

$$\tan\theta = \left|\frac{2-1}{2+1}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore y - x - 2 = 0$ යනු AD සහ AB අතර සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය වන AC හි සමීකරණයයි.

$2x - y + 1 = 0$

$x - 2y + 5 = 0$ සමීකරණ විසඳමු.

$x - 2(2x + 1) + 5 = 0$

$x = 1$ සහ $y = 3$

එවිට, $A \equiv (1, 3)$

C ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (x', y') යයි ගනිමු.

(b) කොටස භාවිතයෙන්, $\dfrac{x' - 1}{a} = \dfrac{y' - 3}{b} = \left|2\sqrt{2}\right|$

AC රේඛාවේ අනුක්‍රමණය සැලකීමෙන්, $\dfrac{a}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b$ වන අතර

$a^2 + b^2 = 1$ නිසා $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{x' - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y' - 3}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 2\sqrt{2}$$

$x' = 1 + 2 = 3, \qquad y' = 3 + 2 = 5,$ හෝ $x' = -1, y' = 1$

C ලක්ෂ්‍යය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන බැවින් $C \equiv (3, 5)$ වෙයි.

BC රේඛාව AD ට සමාන්තර නිසා BC රේඛාවේ සමීකරණය,

$$2x - y = 2(3) - 5 = 1$$

CD රේඛාව AB ට සමාන්තර නිසා CD රේඛාවේ සමීකරණය,

$$x - 2y = 3 - 2(5) = -7$$

BC සහ CD රේඛාවල සමීකරණ, $2x - y - 1 = 0$ සහ

$x - 2y + 7 = 0$ වෙයි.

$$DE = AE\tan\theta = \sqrt{2}\,\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$ABCD$ හි වර්ගඵලය $= 4$ (ADE හි වර්ගඵලය)

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ වර්ගඒකක}$$

---

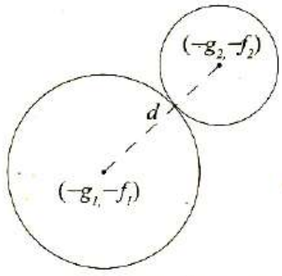
8. (a) වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර දුර d යයි ගනිමු.

එවිට වෘත්තවල අරය $r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$ සහ $r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$

$$d = \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2}$$

වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වන විට

$d = r_1 + r_2$ වන අතර



අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වන විට

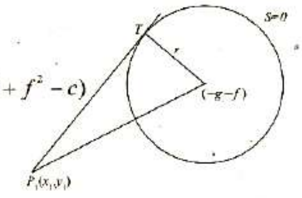
$d = |r_1 - r_2|$ ද වෙයි.

P_1T යනු $S = 0$ වෘත්තයේ ස්පර්ශකය වන විට

$P_1T^2 = P_1C^2 - CT^2$

$P_1C^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2$

$CT^2 = g^2 + f^2 - c$



$\therefore P_1T^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$

$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx + 2fy + c$

$PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

$S_1 = 0$ හි කේන්ද්‍රය $(-2,1)$ ද අරය $\sqrt{10}$ ද වන අතර

$S_2 = 0$ හි කේන්ද්‍රය $(4,3)$ ද අරය $\sqrt{10}$ ද වේ.

$S_1 = 0$ සහ $S_2 = 0$ හි කේන්ද්‍ර පිළිවෙලින් සහ වන විට

$$C_1C_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{10}$$

වෘත්ත දෙකෙහි අරයන්ගේ එකතුය $= \sqrt{10} + \sqrt{10}$

$= 2\sqrt{10}$

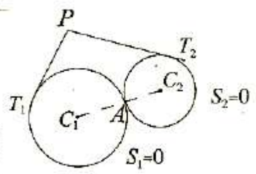
= කේන්ද්‍ර අතර දුර

∴ වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ කරයි.

වෘත්ත දෙකෙහි A ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

එවිට ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ වෙයි.

එනම් $\square \equiv (1,2)$



$PT_1 = k\,PT_1$ වන සේ $P(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.

එවිට $PT_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 5}$

$PT_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 6y_0 + 15}$ වන බැවින්

$x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 5 = \square(x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 6y_0 + 15)$

$x_0^2(1-\square) + y_0^2(1-\square) + 2x_0(2+4\square) - 2y_0(1-3\square) - 5 - 15\square = 0$

P හි පථයේ සමීකරණය

$x^2(1-\square) + y^2(1-\square) + 2x(2+4\square) - 2y(1-3\square) - 5 - 15\square = 0 \square\square\square\square(1)$

(i) $\square = 1$ නම් පථය $2x_0(6) - 2y_0(-2) - 20 = 0$

$3x_0 + y_0 - 5 = 0$

$\square(1,2)$ ලක්ෂ්‍යය $3x + y - 5 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බැවින් P ලක්ෂයේ පථය A හරහා යයි.

C_1C_2 හි අනුක්‍රමණය $= \frac{3-1}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

AP රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $= -3$

∴ $\left(\frac{1}{3}\right)(-3) = -1$ නිසා AP රේඛාව C_1C_2 ට ලම්බ වෙයි.

(ii) ඉහත (1) සමීකරණයේ වම්පැත්තට A හි ඛණ්ඩාංක ආදේශ කරමු.

වම්පැත්ත $= (1-\square) + 4(1-\square) + 2(2+4\square) - 4(1-3\square) - 5 - 15\square$

$= 1 - \square + 4 - 4\square + 4 + 8\square - 4 + 12\square - 5 - 15\square$

$= 0$

$= (1)$ සමීකරණයේ දකුණු පැත්ත

එබැවින් P ලක්ෂයේ පථය A හරහා යන අතර (1) සමීකරණයෙන් නිරූපණය වන්නේ වෘත්තයකි.

$(1 - \square \square 0)$

∴ P හි පථය A හරහා යන වෘත්තයකි.

$\square = \frac{1}{2}$, නම් P හි පථයේ සමීකරණය

$$x^2\frac{3}{4} + y^2\frac{3}{4} + 6x - \frac{y}{2} - \frac{35}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 24x - 2y - 35 = 0$$

මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ ද අරය $r_3 = \sqrt{16 + \frac{1}{\square} + \frac{35}{3}}$

$r_3 = \sqrt{\frac{250}{\square}}$

$C_2(4,3)$, $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ නිසා $r_3 = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

$$C_2C_3 = \sqrt{8^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{\square}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

$$r_2 + r_3 = \sqrt{10} + \frac{5\sqrt{10}}{3} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

∴ $C_2C_3 = r_2 + r_3$ නිසා $S_2 = 0$ වෘත්තය සහ P හි පථය බාහිරව ස්පර්ශ කරයි.

$C_1 \equiv (-2,1)$ සහ $C_3\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ නිසා

$$C_1C_3 = \sqrt{2^2 + \frac{4}{\square}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$r_3 - r_1 = \frac{5\sqrt{10}}{3} - \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ නිසා

∴ $C_1C_3 = r_3 - r_1$ වෙයි.

එබැවින් P පථය $S_1 = 0$ වෘත්තය අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි.

---

9. (a) කෝසයින් නීතිය $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

සාධනය:

ABC ත්‍රිකෝණය සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සලකමු.

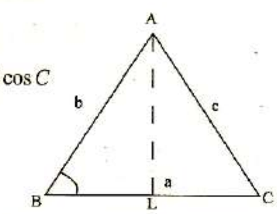
$AB^2 = AL^2 + LB^2$

$= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$

∴ $c^2 = a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

∴ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



ABC ත්‍රිකෝණය සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සලකමු.

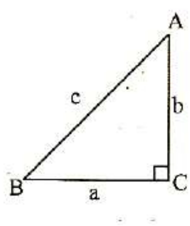
$C = \frac{\pi}{2}$, යැයි සලකමු.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

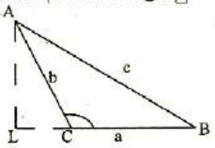
$= b^2 + a^2$

∴ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2}$

$C = \frac{\pi}{2}$, වන විට $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



ABC ත්‍රිකෝණය මහා කෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන අවස්ථාව සලකමු.



$$AB^2 = AL^2 + LB^2$$

$$AL = b\sin(\pi - C)$$

$$= -\sin C$$

$$c^2 = [b\sin(\pi - C)]^2 + [a + b\cos(\pi - C)]^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2[\sin^2(\pi - C) + \cos^2(\pi - C)] + 2ab\cos(\pi - C)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(i)

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$\therefore 2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

(ii) $\quad \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c}$ නම්,

$$(a+b+c)(b+c) + (a+c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$$

$$ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 + a^2 + ab + ac + ac + bc + c^2 = 3ab + 3bc + 3ca + 3c^2$$

$$ab = -c^2 + a^2 + b^2$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{3}$$

(b)

$$\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right]$$

$$= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$R\cos(\theta - \alpha)$ හි $\quad R = 2 \quad$ සහ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{6} \quad$ වේ.

$$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos\theta - \sin\theta$$

$$(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)\left[\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1\right] = 0$$

$(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \quad$ හෝ $\quad \left[\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1\right] = 0$

$\tan\theta = 1$

සාධාරණ විසඳුම

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

$$\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$$

$$2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \square\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\square\pi$$

$$= 2\square\pi + \frac{\pi}{6}\square\frac{\pi}{3}$$

මෙහි m යනු ධන නිඛිලයකි

---

9. (c) $x > 0$ යයි ගනිමු. $\cos^{-1}x = \theta$ යයි ගනිමු.

$0 \le x \le 1$ නිසා $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

එවිට $x = \cos\theta$

$$-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$$

$\pi - \theta$ ද, 0 සහ π අතර පවතී.

$$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(x)$$

$\pi - \theta$ ද, 0 සහ π අතර පවතී.

$x < 0$ යැයි ගනිමු.

$x = -y$ ලෙස ගත් විට y ධන වේ. එවිට

$$\cos^{-1}(-y) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(y)$$

මෙහි $x = -y$ ආදේශයෙන්,

$$\cos^{-1}x = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}(-x)$$

$$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$$

$x = 0$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\cos^{-1}x = \cos^{-1}0 = \dfrac{\pi}{2}$ සහ

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$$

$$\therefore \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$$