ගොනු 25

31351

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

10 S I

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2010 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2010 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2010

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

※ ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (a) α සහ β යනු $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ; මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p-x) = p + x$ නම්, x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $g(y) \equiv (2p^2+q)y^2 + 2(q-p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $y \neq -1$ වේ.
එනයින්, $g(y)=0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.
p හා q ඇසුරෙන් $\left(\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) a, b, c හා m යනු $a+b+c=0$ හා $ab+bc+ca+3m=0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y+ax)(y+bx)(y+cx) = y\left(y^2 - 3mx^2\right) + abcx^3$ බව සාධනය කරන්න.
$y = x^2 + m$ නම්, $\left(x^2+ax+m\right)\left(x^2+bx+m\right)\left(x^2+cx+m\right) = x^6 + abcx^3 + m^3$ බව පෙන්වන්න.
$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $\left(x^2-2x+m\right), \left(x^2+ax+m\right)$ හා $\left(x^2+bx+m\right)$ යන සාධක තිබේ නම්,
m, a හා b හි අගයන් සොයන්න.
එනයින්, (i) සියලු x සඳහා $g(x)$ සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න,
(ii) $g(x)=0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

2. (a) $1, 2, 4, 5, 6, 8$ හා 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන්, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක්
(i) පුනරාවර්තනය සහිතව,
(ii) පුනරාවර්තනය රහිතව
තෝරා ගෙන, **සංඛ්‍යාංක හතරේ** වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.
(i) අවස්ථාවේ දී, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා වැඩියෙන් නොතිබේ දැයි සොයන්න.
(ii) අවස්ථාවේ දී, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් තිබේ දැයි, සොයන්න.
ඒවායින් කොපමණ ගණනක් ඉරට්ටේ වේ දැයි සොයන්න.

(b) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + \ldots + {}^nC_r x^r + \ldots + {}^nC_n x^n$ යැයි ගනිමු; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වේ.
$(1+x)^{n-1}$ හා $(1+x)$ හි ගුණිතය සැලකීමෙන් $r = 1, 2, \ldots, n-1$ සඳහා ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ බව පෙන්වන්න.
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\ {}^nC_{n-1} + (-1)^n\ {}^nC_n = 0$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
වෙනත් ක්‍රමයක් මගින් ඉහත ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.
n යනු ඉරට්ටේ නිඛිලයක් නම් ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[දෙවන පිටුව බලන්න.

3. ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා, **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** මගින්, $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $r = 1, 2, \ldots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[ඔබට $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැකි ය.]

$$1^2 + \left(1^2 + 2^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) + \cdots$$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය v_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \ldots$$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය w_r යැයි ගනිමු.

$w_r = f(r) - f(r+1)$ වන ආකාරයට $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $S_n = \sum_{r=1}^{n} w_r$ සොයන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

4. (*a*) $|z-a| = |z+a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න; මෙහි a යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.

(*b*) z_1 හා $z_2\ (\neq 0)$ යනු $|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

(*a*) කොටස උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\frac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න;

මෙහි k තාත්ත්වික වේ.

(i) $\left|\arg(z_1) - \arg(z_2)\right| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ආර්ගන් සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක පිළිවෙළින් $z_1 + 2z_2$ හා $z_1 - 2z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි O යනු ආර්ගන් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න.

5. (*a*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

(*b*) (i) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හා $z=\tan^{-1}x$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{dy}{dz}$ සොයන්න.

(ii) $y=e^{m\sin^{-1}x}$ යැයි ගනිමු; මෙහි m යනු නියතයකි. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$ බව පෙන්වන්න.

$x=0$ හි දී, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න.

(*c*) දෙන ලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන $A(x)$ යන්න $A(x)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{(l-x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක, මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි x, $(0\le x\le l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ.

ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක්, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, $A(x)$ වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න.

6. (*a*) **භින්න භාග** උපයෝගී කර ගනිමින් $\displaystyle\int \frac{2x}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I=\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ හා $J=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(i) $bI + aJ = e^{ax}\sin bx,$

(ii) $aI - bJ = e^{ax}\cos bx$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

(*c*) $x^3t+1=0$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

7. (*a*) $a_1x+b_1y+c_1=0$ හා $a_2x+b_2y+c_2=0$ සරල රේඛා අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\left(x_0, y_0\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක සමීකරණය $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=t$ ලෙස පරාමිතික ආකාරයෙන් දී ඇත; මෙහි $a^2+b^2=1$ හා t පරාමිතියක් වේ. $|t|$ යනු $\left(x_0, y_0\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට (x,y) ලක්ෂ්‍යයට රේඛාව දිගේ මනින ලද දිග බව පෙන්වන්න.

(*c*) $ABCD$ රොම්බසය පූර්ණ ලෙස පළමු පාදකය තුළ පිහිටයි. AB හා AD හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x-2y+5=0$ හා $2x-y+1=0$ වේ. BAD කෝණය සුළු කෝණයක් වන අතර $AC=2\sqrt{2}$ වේ. (*a*) හා (*b*) කොටස් උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, AC හි හා රොම්බසයේ අනෙක් පාද දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. E යනු රොම්බසයේ විකර්ණවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නම් DE හි දිග සොයා, **ඒ නයින්**, රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

8. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තර ලෙස හෝ බාහිර ලෙස හෝ එකිනෙක ස්පර්ශවීම සඳහා අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න.

$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යනු වෘත්තයක් යැයි ද, $P_1(x_1, y_1)$ යනු $S=0$ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. P_1 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$S_1\equiv x^2+y^2+4x-2y-5=0$ හා $S_2\equiv x^2+y^2-8x-6y+15=0$ වෘත්ත දෙක බාහිර ලෙස එකිනෙක ස්පර්ශවන බව සාධනය කරන්න.

$S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

P යනු, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_1=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග, k වරක් P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_2=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිගට සමාන වන ආකාරයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යයේ පථය,

(i) $k=1$ නම්, $S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට ලම්බව A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක් බව,

(ii) $k\neq 1$ නම්, A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයක් බව,

සාධනය කරන්න.

$k=\frac{1}{2}$ විට P ලක්ෂ්‍යයේ පථයේ සමීකරණය ලියා දක්වා, එය, A ලක්ෂ්‍යයේ දී $S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙන් එකක් බාහිර ලෙස ද, අනෙක අභ්‍යන්තර ලෙස ද ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

9. (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $2\left(\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ බව,

(ii) $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ නම් එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව,

පෙන්වන්න.

(*b*) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R හා α තාත්ත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos^2\theta+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(*c*) $-1\leq x\leq 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න.

***