2.1.2 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** යොදගෙන, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, L.H.S. = 1 = R.H.S. වේ. **(05)**

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n=1$ ට සත්‍ය වේ.

$n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු. මෙහි p යනු ධන නිඛිලයකි.

එවිට, $1+2+\ldots+p=\dfrac{p(p+1)}{2}$ වේ. **(05)**

$n=p+1$ විට,

$$1+2+\ldots+p+(p+1)=\underbrace{\frac{p(p+1)}{2}+(p+1)}_{(05)}=\underbrace{\frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}}_{(05)} \text{ වේ.}$$

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n=p+1$ ට සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ වේ.

(05) **[25]**

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

බොහෝ අපේක්ෂකයන් $n=p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේදී අවසාන ප්‍රතිඵලය නිවැරදිව ඉදිරිපත් කර නොතිබිණි. එම ප්‍රතිඵලය $\dfrac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}$ හෝ $\dfrac{(p+1)(\overline{p+1}+1)}{2}$ ලෙස දැක්විය යුතුව තිබුණ ද ඒ වෙනුවට $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ ලෙස පමණක් ලියා තිබිණි. එමගින්, ප්‍රතිඵලය $n=p+1$ සඳහා සත්‍ය බව සනාථ නොවේ. තවද පිළිතුර අවසානයේදී "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව දී ඇති ප්‍රකාශය සත්‍ය බව" බොහෝ පිළිතුරුවල සඳහන් කර නොතිබිණ. එසේ වුව ද පිළිතුරු සැපයීම හොඳ මට්ටමක පැවතුණි. "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය" යොදා ගනිමින්, දී ඇති ප්‍රතිඵලයක් ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේ හැකියාව සිසුන් සතුව තිබුණ ද එම ක්‍රියාවලියට අයත් පියවර සියල්ල නිවැරදිව, තර්කානුකූලව හා අනුපිළිවෙළින් ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් හුරුවී නොතිබීම නිසා මුළු ලකුණු හිමිකරගත් පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අඩුවී ඇත. I පත්‍රයෙහි A කොටසෙහි දී ඇති කෙටි පිළිතුරු අපේක්ෂිත අනිවාර්ය ප්‍රශ්න 10 අතුරෙන් වඩාත්ම පහසු ප්‍රශ්නය වුව ද එහි පහසුතාව 61%කට සීමාවීමට සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල මෙමඅඩුපාඩු ද හේතු වී ඇත.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. ADDING යන වචනයේ අකුරු සියල්ලම යොදගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණ ගණනක ප්‍රාණාක්ෂර (vowels) වෙන්ව පවතී දැයි සොයන්න.

වචනයට අකුරු හයක් ඇති අතර එයින් අකුරු දෙකක් එකම වර්ගයේ වේ.

අකුරු සියල්ලම ගෙන කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \dfrac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(05) **(05)** **[10]**

ප්‍රාණාක්ෂර දෙකක් ඇති අතර, නම් වශයෙන් ඒවා A හා I වේ.

මෙම ප්‍රාණාක්ෂර දෙක එක අකුරක් ලෙස ගනිමින් ප්‍රාණාක්ෂර එකට සිටින ලෙස කළ හැකි මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ **(05)**

A හා I අතුරු මාරු කළ හැකි බැවින්, ප්‍රාණාක්ෂර එකට සිටින ලෙස කළ හැකි මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන $= 2 \times 60 = 120$ **(05)**

එබැවින්, ප්‍රාණාක්ෂර වෙන්ව පවතින ලෙස කළ හැකි මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන

$= 360 - 120 = 240$ **(05)** **[15]**

---

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

සංකරණ සහ සංයෝජන ආශ්‍රිත මූලික සංකල්ප පිළිබඳ ප්‍රමාණවත් අවබෝධයක් නොතිබීම නිසා සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට සිසුනට නොහැකි වීමෙන් මෙම ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 31%කට සීමාවී තිබිණි. පන්ති කාමරයේදී සාමාන්‍යයෙන් භාවිත කෙරෙන සරල අභ්‍යාසවල නිරතවීමේ පරිචය තිබිණි නම්, මෙම ප්‍රශ්නයට ඉතා පහසුවෙන් නිවැරදි හා සම්පූර්ණ පිළිතුරු සැපයීමේ හැකියාව සිසුන් සතුවන බව නොඅනුමාන ය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. p නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් වන $(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය හා x^2 හි සංගුණකය පිළිවෙළින් $-q$ හා $11q$ නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

$(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x පදය ${}^{12}C_1\, px$ වේ.

x හි සංගුණකය : ${}^{12}C_1\, p = -q \Rightarrow 12p = -q \rightarrow (1)$ **(05)**

$(1+px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^2 පදය ${}^{12}C_2\, p^2x^2$ වේ.

x^2 හි සංගුණකය : ${}^{12}C_2\, p^2 = 11q \Rightarrow 66p^2 = 11q \Rightarrow 6p^2 = q \rightarrow (2)$ **(05)**

$(1) + (2) \Rightarrow p = -2$ හෝ 0 වේ. **(05)**

p යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් බැවින් $p = -2$ වේ. **(05)**

(1) න් $q = 24$ යැයි ලැබේ. **(05)** **[25]**

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

ද්විපද ප්‍රසාරණය හා ${}^{n}C_{r}$ සුළු කිරීම පිළිබඳ දැනුම ප්‍රමාණවත් නොවීම ද, p යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් බව දී තිබුණ ද එය සැලකිල්ලට ගෙන නොතිබීම ද නිසා පිළිතුරු ප්‍රමාණවත් තරම් සතුටුදායක වී නැත. p නිශ්ශුන්‍ය බව සඳහන් නොකර බෙදීම නිසා ද ලකුණු නොලැබී ගොස් තිබුණි.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \dfrac{1}{17}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{2\dfrac{\sin^2 3x}{x^2} - \cos x} \quad \begin{matrix}\textbf{(05)}\\ \textbf{(05)}\end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{18\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2 - \cos x} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}}{18\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\right\}^2 - \lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{18-1} = \frac{1}{17}$$

(05) **(05)** **[25]**

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල නිවැරදි භාවිත හැකියාව හීනවීම නිසා බොහෝ පිළිතුරු ප්‍රමාණවත් තරම් සතුටුදායක මට්ටමක නොතිබිණි. එබැවින් ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 26% තරම් අඩු මට්ටමකට පහළ බැස ඇත. සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල භාවිත ඇතුළත් අභ්‍යාසවලදී එම එක් එක් ප්‍රමේයය යොදා ගැනෙන අවස්ථාව නිරූපණය වන සේ සකස්කර ගැනීමේ පියවර පටිපාටිය ලියා දැක්විය යුතු වුව ද බොහෝ සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල ඒ බව දක්නට නොලැබීම අඩුපාඩුවක් මෙන්ම මුළු ලකුණු නොලැබීමට ද හේතුවකි.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $2e^{x}+3e^{-x}=A(2e^{x}-e^{-x})+B(2e^{x}+e^{-x})$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $\int \frac{2e^{x}+3e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx$ සොයන්න.

$2e^{x}+3e^{-x}=A(2e^{x}-e^{-x})+B(2e^{x}+e^{-x})$

$(2A+2B-2)\,e^{x}+(-A+B-3)\,e^{-x}=0 \Rightarrow A+B=1$ හා $-A+B=3$ වේ.

$\Rightarrow A=-1$ හා $B=2$ වේ.

(05) **(05)** **[10]**

$\int \frac{2e^{x}+3e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{2e^{x}-e^{-x}}{2e^{x}+e^{-x}}\,dx + 2\int dx = -\ln(2e^{x}+e^{-x})+2x+C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(05) **(05)** **(05)**

[15]

---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

A සහ B නියත නිවැරදිව සොයා තිබූ නමුදු දී ඇති අනුකලය සුදුසු පරිදි සරල අනුකලවලට වෙන් කිරීමේ ක්‍රියාවලිය සතුටුදායක මට්ටමක නොවීම නිසා අවසාන පිළිතුර කරා ළඟාවීමට නොහැකිවීමෙන් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 48%කට සීමාවී ඇත. සරල අනුකල ආශ්‍රිත අභ්‍යාසවල නිරතවීමෙන් සිසුන් ලබන පරිචය මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීම සඳහා ඉතා ප්‍රයෝජනවත් වේ.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. l යනු $(4,0)$ හා $(0,2)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද, m යනු $(2,0)$ හා $(0,3)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද යැයි ගනිමු. l හා m සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න. **ඒ නයින්**, l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හා මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

l හි සමීකරණය $\frac{y}{x-4}=\frac{2-0}{0-4} \Rightarrow 2x+4y-8=0 \Rightarrow x+2y-4=0$ වේ. **(05)**

m හි සමීකරණය $\frac{y}{x-2}=\frac{3-0}{0-2} \Rightarrow 3x+2y-6=0$ වේ. **(05)** **[10]**

---

l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය

$x+2y-4+\lambda(3x+2y-6)=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි. **(05)**

මෙම රේඛාව මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින්, $\lambda=-\frac{2}{3}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

එබැවින්, අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය $2y-3x=0$ වේ. **(05)** **[15]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය $y - \mu x = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි μ යනු පරාමිතියකි. **(05)**

l හා m හි ඡේදන ලක්‍ෂ්‍යය $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ වේ. **(05)**

රේඛාව මෙම ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින් $\mu = \dfrac{3}{2}$ යැයි ලැබේ.

එබැවින්, අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය $2y - 3x = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

$l_1 = 0$ සහ $l_2 = 0$ සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය λ පරාමිතියක් වන $l_1 + \lambda l_2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව භාවිත කිරීම වෙනුවට බොහෝ අපේක්ෂකයන් සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයා පිළිතුරු සපයා තිබිණ. සිද්ධාන්ත කේන්ද්‍රීය වූ වඩාත් පහසු කෙටි ක්‍රමයක් මගින් පිළිතුරු සපයා මුළු ලකුණු උපයා ගත හැකිව තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයට සපයා තිබූ බොහෝ පිළිතුරු දීර්ඝ වූ ද වැඩි කාලයක් අවශ්‍ය වූ ද ලකුණු උපයා ගැනීම දුෂ්කර වූ ද ඒවා බව දක්නට ලැබිණි. මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 59%ක් වන අතර මීට වඩා වැඩි පහසුතාවක් ඇති පළමුවන ප්‍රශ්නයේ ද පහසුතාව 61%ක් පමණි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. C නම් වක්‍රයක් $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබෙයි. C වක්‍රයට $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

$(1, 2)$ ලක්ෂයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = \left.(-4 + 6x - 3x^2)\right|_{x=1} = -1 \text{ වේ.}$$

(05) **(05)**

එබැවින්, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\dfrac{y - 2}{x - 1} = -1$ වේ.

එනම්, $x + y - 3 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

$(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\,2)} = \left.\frac{2}{y}\right|_{y=2} = 1 \text{ වේ.}$$ **(05)**

$(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $\times$ $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= (-1) \times 1 = -1$ වේ.

එබැවින්, $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී C වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකය $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ වේ. **(05)** **[10]**

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

දී ඇති ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍ර දෙකට ඇඳි ස්පර්ශකවල සමීකරණ නිවැරදිව සොයා ඇති නමුත් ඒවා එකිනෙකට ලම්බ බව පෙන්වීම සඳහා එම සරල රේඛා දෙකෙහි අනුක්‍රමණවල ගුණිතය -1 බව පෙන්වීම භාවිත නොකිරීමේ හේතුවෙන් මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමේ පසුබටට බවක් දක්නට ලැබිණි. ඒ හේතුවෙන් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 40%කට සීමාවී ඇත.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $(2,0)$ හා $(0,2)$ **ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය** $x^2+y^2-4+\lambda(x+y-2)=0$ **ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි** λ **යනු පරාමිතියකි. මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය** λ **ඇසුරෙන් සොයන්න.**

$(2, 0)$ හා $(0, 2)$ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එවිට, $4 + 4g + c = 0$ හා $4 + 4f + c = 0$ යැයි ලැබේ. **(05)**

ඉහත සමීකරණ දෙකෙන් $f = g$ හා $c = -4\,(g+1)$ යැයි ලැබේ. **(05)**

එබැවින්, සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy - 4\,(g+1) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එනම්, $x^2 + y^2 - 4 + \lambda\,(x + y - 2) = 0$; මෙහි $\lambda = 2g$ වේ. **(05)** **[15]**

$$\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4 - 2\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 = 0$$

එනම්, $\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{(\lambda+2)^2+4}{2} = 0$

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $\left(-\frac{\lambda}{2},\ -\frac{\lambda}{2}\right)$ වේ. **(05)**

වෘත්තයේ අරය $\sqrt{\frac{(\lambda+2)^2+4}{2}}$ වේ. **(05)** **[10]**

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය, I පත්‍රයෙහි A කොටසෙහි ඇති කෙටි පිළිතුරු අපේක්ෂිත ප්‍රශ්න දහය අතුරෙන් පහසුතාව අඩුම ප්‍රශ්නයයි. එහි පහසුතාව 22%තෙක් අඩුවී තිබිණි. ඛණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතිය තේමාවෙහි වෘත්තය සම්බන්ධ විෂය ඒකකය මෙන්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පාදක කර ගනු ලැබූ විෂය කරුණු ද දුෂ්කර නොවන නමුදු අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය සාධනය කිරීම වෙනුවට සත්‍යාපනය කර තිබීම ද ලකුණු අඩුවන්නට හේතු වී තිබිණි. ප්‍රශ්නය විමසෙන ආකාරය අනුව පිළිතුර සංවිධානය කර ගැනීමට සිසුන් හුරු කරවීමේ අවශ්‍යතාව මෙහිදී අවධාරණය කළ යුතු වේ.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. ***AB*** **විෂ්කම්භයක් සහිත** ***S*** **වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න; මෙහි** $A = (1, 3)$ **හා** $B = (2, 4)$ **වේ. තවද,** ***S*** **වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස කපන** $(-1, 2)$ **කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.**

S වෘත්තය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) යැයි ගනිමු.

එවිට, $\left(\dfrac{y - 3}{x - 1}\right)\left(\dfrac{y - 4}{x - 2}\right) = -1$ යැයි ලැබේ. **(10)**

එනම්, $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

S වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(-g, -f)$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $-g = \dfrac{3}{2}$ හා $-f = \dfrac{7}{2}$ යැයි ලැබේ. **(05)**

S වෘත්තයේ අරය $\sqrt{\dfrac{(2-1)^2 + (4-3)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ වේ. **(05)**

එබැවින්, S වෘත්තයේ සමීකරණය $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ වේ.

එනම්, $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ වේ. **(05)** **[15]**

$(-1, 2)$ කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ යැයි ගනිමු. **(05)**

මෙම වෘත්තය හා S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බැවින්

$2\left(-\dfrac{3}{2}\right)(1) + 2\left(-\dfrac{7}{2}\right)(-2) = k + 14 \Rightarrow k = -3$ යැයි ලැබේ.

එබැවින් වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ වේ. **(05)** **[10]**

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය ද සතුටුදායක සාධන තත්ත්වයක් නොදක්වන ප්‍රශ්නයකි. පහසුතාව 35%ට ද වඩා අඩු ය. දී ඇති තොරතුරු අනුව, විෂ්කම්භයේ දෙකෙළවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක දී ඇති $S = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය නිවැරදිව සොයා තිබුණ ද, එම $S = 0$ වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය ලබා ගැනීම සඳහා නිවැරදි යොදා ගැනීම් කර නොතිබීම ලකුණු අඩුවීමට වැඩි වශයෙන්ම බලපෑ හේතුවකි.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ යැයි ගනිමින්, $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\dfrac{23}{12}\pi\right)$ හි අගය **අපෝහනය** කරන්න.

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

(05) **(05)** **(05)** **[15]**

$$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-2$$

(05) **(05)** **[10]**

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නයට සපයා තිබූ පිළිතුරු තරමක් සතුටුදායක වී තිබූ අතර, ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 48% තෙක් වර්ධනය වී ඇත. සිසුන් බොහෝ දෙනකු පළමුවන කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු ලියා තිබුණු නමුත් ඔවුන් වැඩි දෙනකුට අපෝහනය පිළිබඳව පැහැදිලි අවබෝධයක් නොමැති වීම නිසා ඊට නියමිත ලකුණු නොලැබීමෙන් මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමේ අවස්ථාව ඔවුන් විසින් අහිමි කර ගෙන තිබිණි. $(0, \pi/2)$ ප්‍රාන්තරයෙන් බැහැර පිහිටි කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ගණනය කිරීමේදී කෝණවල ආවර්තමය සම්බන්ධතා හා ඒවාට අනුරූප ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත අතර ඇති සම්බන්ධතා සුදුසු ලෙස භාවිත කිරීමට සිසුන් යොමු කරවිය යුතුය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (a) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

(i) $f(x)$ යන්න $(x-a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

කලනය භාවිතයෙන් තොරව, $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $y = f(x)$ වක්‍රය

(α) $-1<k<2$ නම්, x-අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව,

(β) $k=-1$ හෝ $k=2$ හෝ නම්, x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව,

(γ) $k<-1$ හෝ $k>2$ හෝ නම්, x-අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන බව

පෙන්වන්න.

(ii) $k<-2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න.

(b) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු.

ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

$g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(a) (i) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2 \equiv (x+k)^2 + 2 + k - k^2$, **(05)**

$\equiv (x-a)^2 + b$; මෙහි $a = -k$ හා $b = 2 + k - k^2$ වේ.

(05) **(05)** **[15]**

$-\infty$ සිට $-k$ දක්වා x වැඩි වන විට, ∞ සිට $2 + k - k^2$ අගය දක්වා $f(x)$ ශ්‍රිතය අඩු වන අතර

$-k$ සිට ∞ දක්වා x වැඩි වන විට, $2 + k - k^2$ සිට ∞ දක්වා $f(x)$ ශ්‍රිතය වැඩි වේ. **(05)**

එබැවින්, $x = -k$ හිදී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය එකක් පමණක් ඇති අතර එය අවම ලක්ෂ්‍යයකි.

(05) **(05)** **[15]**

$f(x)$ හි අවම අගය $2 + k - k^2$ වේ. **(05)** **[05]**

$2 + k - k^2 = (2-k)(1+k)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

(α) $-1 < k < 2$ නම්, එවිට $f(x)$ හි අවම අගය ධන වන අතර $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය x **(05)**

අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටිය යුතු වේ.

(05) **[10]**

(β) $k = -1$ හෝ $k = 2$ නම්, එවිට $f(x)$ හි අවම අගය ශුන්‍ය වන අතර $f(x)$ හි **(05)**

ප්‍රස්තාරය $x-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කළ යුතු වේ.

(05) **[10]**

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ නම් එවිට, $f(x)$ හි අවම අගය ඍණ වන අතර $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය, **(05)**

$x-$ අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කළ යුතු වේ.

(05) **[10]**

(ii) $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරයි නම් එවිට, ඕනෑම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක පාටිකය $x^2 + 2kx + k + 2 = mx$ සමීකරණය තෘප්ත කළ යුතු වේ. **(05)**

එනම්, $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ ට ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙයි ම නම් පමණක් $y = mx$ සරල රේඛාව හා $y = f(x)$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය වේ. **(05)**

එනම්, $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ ම නම් පමණි. **(05)**

$k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගය සඳහා $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගය සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව හා $y = f(x)$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය වේ. **[25]**

(b) $g(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2 = 0$ **(05)**

$g(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය 0 වේ.

$\therefore (x + 1)$ යනු $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. **(05)**

එබැවින්, $g(x) \equiv (x + 1)\, Q(x)$ වේ; **(05)** මෙහි $Q(x)$ යනු $g(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ලබ්ධිය වේ.

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ වේ. **(05)**

$Q(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$ වේ. **(05)**

$Q(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය 0 වේ.

එබැවින්, $Q(x) \equiv (x + 1)\, R(x)$ වේ; **(05)** මෙහි $R(x)$ යනු $Q(x)$ යන්න $(x + 1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ලබ්ධිය වේ.

$\therefore$ $(x + 1)$ යනු $Q(x)$ හි සාධකයක් වේ. **(05)**

$\therefore$ $(x + 1)^2$ යනු $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. **[35]**

$R(x) = x^2 + 2x + 2$ **(05)**

$g(x) = (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)$

$g(x) = (x - a)^2 (x^2 + bx + c)$ වේ; මෙහි $a = -1,\ b = 2,\ c = 2$ වේ. **(10)** **[15]**

---

x හි සියලු තාත්ත්වික අගය සඳහා

$g(x) = (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2 \left\{(x + 1)^2 + 1\right\} \geq 0$ වේ. **(05)**

(05) **[10]**

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$, වන පරිදි $f(r)$ නිර්ණය කරන්න; මෙහි $u_r = \dfrac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$ වෙයි.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ හි අගය සොයන්න.

(*b*) **එකම රූපයක**, $y = |2x-1|$ හා $y = |x| + \dfrac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ඕනෑම $k \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය **එකම රූපයේ සලකමින්**, l හි කවර අගයක් සඳහා $3|x| = |6x-3| + l$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් එකක් පමණක් තිබේ දැයි සොයන්න.

(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ වේ.

$x = \frac{1}{2}$ සඳහා $B = \frac{1}{2}$ වේ. **(05)**

$x = -\frac{1}{2}$ සඳහා $A = -\frac{1}{2}$ වේ. **(05)** **[10]**

$$\frac{12r^2 + 1}{(2r-1)^3(2r+1)^3} = \frac{-\frac{1}{2}(2r-1)^3 + \frac{1}{2}(2r+1)^3}{(2r-1)^3(2r+1)^3} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{1}{2(2r-1)^3} - \frac{1}{2(2r+1)^3} = f(r) - f(r+1)\text{ ; මෙහි } f(r) = \frac{1}{2(2r-1)^3}$$

(05) **(05)** **[15]**

$u_1 = f(1) - f(2)$ **(05)**

$u_2 = f(2) - f(3)$ **(05)**

....

....

....

$u_{n-1} = f(n-1) - f(n)$ **(05)**

$u_n = f(n) - f(n+1)$ **(05)**

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$$

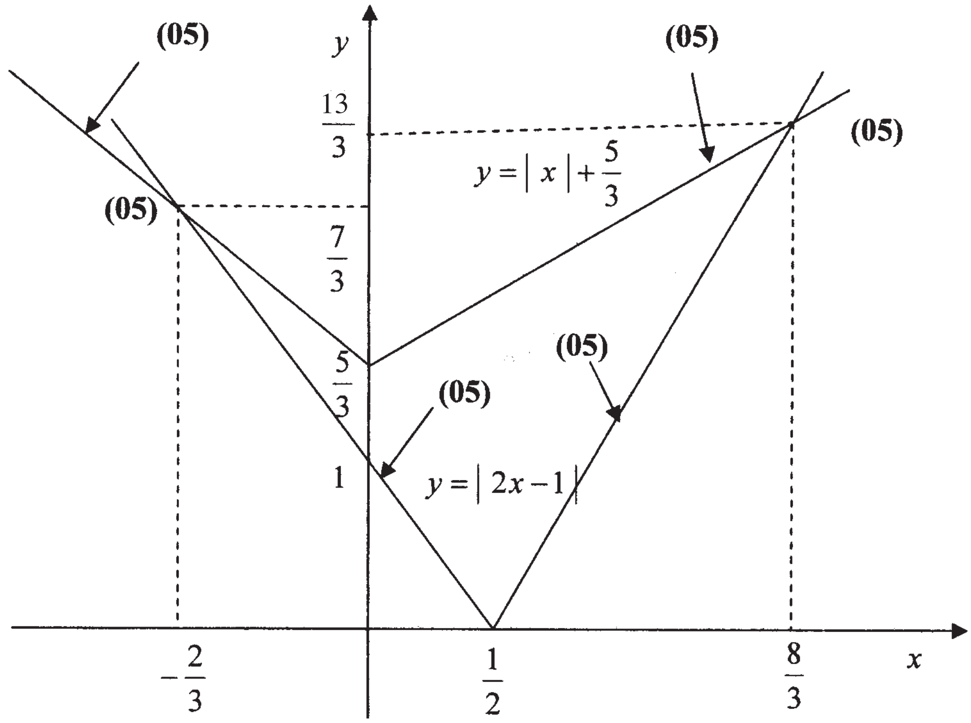
(05) **(05)** **[30]**

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \right\} = \frac{1}{2}$$ (පරිමිත වේ.) **(05)**

එබැවින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. **(05)** **[10]**

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ හි අගය $\frac{1}{2}$ වේ. **(05)** **[05]**

(*b*)



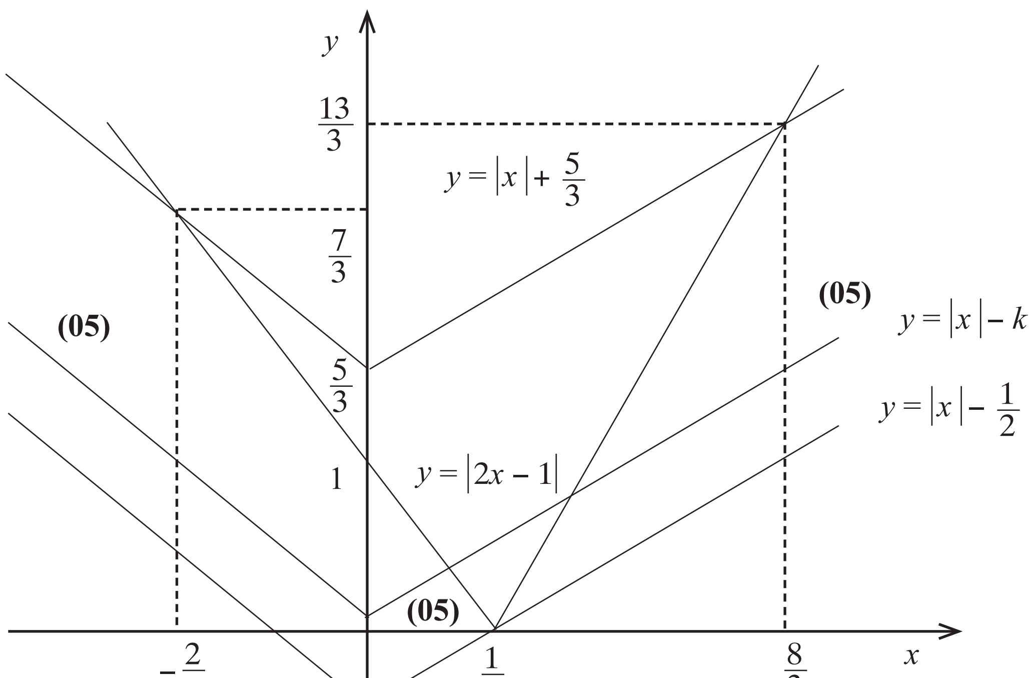
[30]

$3\,|\,x\,| \geq |6x-3| - 5 \Rightarrow |\,x\,| + \dfrac{5}{3} \geq |\,2x-1\,|$ **(05)**

එබැවින්, $3\,|\,x\,| \geq |6x-3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය $\left\{ x : -\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{8}{3} \right\}$

හෝ $x \in \left[\dfrac{-2}{3}, \dfrac{8}{3}\right]$

(05) **[10]**



[15]

$y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන විට

(05)

$3|x| = |6x - 3| + l \Rightarrow |x| - \frac{l}{3} = |2x - 1|$ ට එක තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් තිබේ. **(05)**

මේ සඳහා $k = \frac{1}{2}$ විය යුතුය. **(05)**

$|x| - \frac{l}{3} = |x| - \frac{1}{2}| \Rightarrow l = \frac{3}{2}$ **(05)** **[25]**

(05)

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය හා $\mathbf{O}$ යනු 2×2 ශුන්‍ය න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{A}^{-1}$ සොයන්න.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{BA} = \mathbf{B}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින්, $\mathbf{BC} = \mathbf{O}$ වන පරිදි $\mathbf{C}$ නම් නිශ්ශුන්‍ය 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න.

(*b*) z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $|z| \geq \operatorname{Re} z$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ බව පෙන්වන්න.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$|z - i| < \dfrac{1}{2}$ නම්, $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$|z - i| \leq \dfrac{1}{2}$ හා $\dfrac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \dfrac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

(*a*) $$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(05)}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}} = 0$$

[20]

$$2\mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \underbrace{3\mathbf{I} - \mathbf{A}}_{\mathbf{(05)}} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(05)}$$

[10]

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \quad \mathbf{(05)}$$

[05]

$$\underbrace{\mathbf{BA} - \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{O}}_{\mathbf{(05)}} \Rightarrow \mathbf{BC} = \mathbf{O}, \text{ මෙහි } \mathbf{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{(05)}}$$

[15]

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ.

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \left\{ \sqrt{x^2+y^2} \right\}^2 = |z|^2$. **(05)** **[05]**

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \geq x = \operatorname{Re} z$.

(05) **(05)** **[10]**

$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \ \textbf{(05)} \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \ \textbf{(05)} \\
&\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2| \ \textbf{(05)} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2| \\
&\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \ \textbf{(05)} \\
&= (|z_1| - |z_2|)^2 \ \textbf{(05)}
\end{aligned}$$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ **[25]**

$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \geq |z_1 + z_2| - |z_2|$

(05) **(05)**

එනම්, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **[10]**

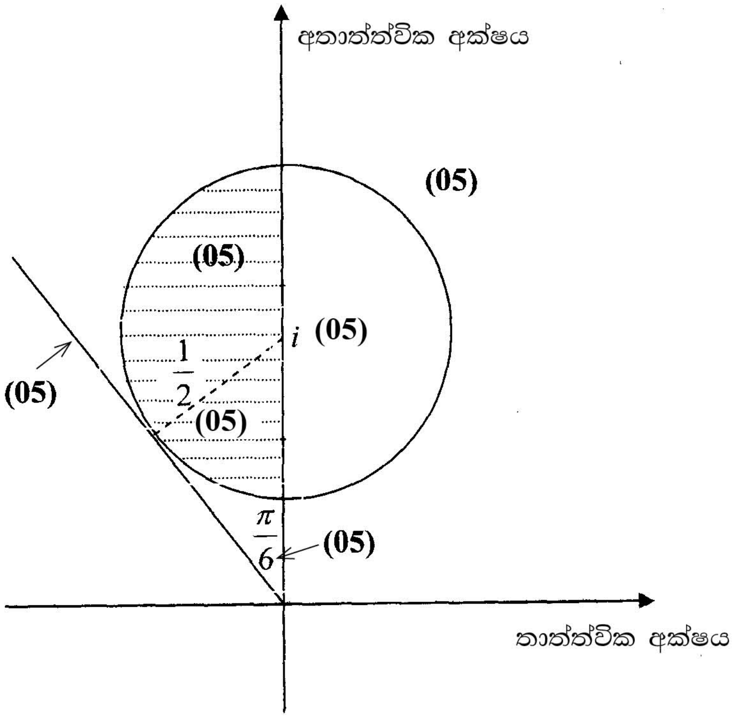
$|z| - |i| \leq |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{3}{2}$

(05) **(05)**

$|i| - |z| \leq |i - z| = |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$.

(05) **(05)**

එනම්, $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **[20]**



[30]

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (a) **පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක්** සලකමින් $\dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, k හි කවර අගයන් සඳහා $kx^4-x^3+27k=0$ සමීකරණයට

(i) තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

(ii) තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ දැයි,

(iii) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

(iv) තාත්ත්වික මූල නොතිබේ දැයි

සොයන්න; මෙහි k තාත්ත්වික වෙයි.

(b) $AB=a$ හා $BC=b\ (<a)$ සහිත $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $AP+PB$ හි දිග $L(x)$ වෙයි; මෙහි $DP=x$ වෙයි.

$L(x)=\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(a-x)^2+b^2}$ බව පෙන්වන්න.

$L(x)$ හි අවම දිග හා මෙම අවම දිගට අනුරූප P හි පිහිටුම CD මත සොයන්න.

$L(x)$ හි උපරිම දිග ද සොයන්න.

(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^4+27)-x^3(4x^3)}{(x^4+27)^2}=\dfrac{x^2(81-x^4)}{(x^4+27)^2}=0 \Rightarrow x=-3,0,3$ වේ.

(05) **(05)** **(05)**

x හි පරාසය	$(-\infty,\ -3)$	$(-3,0)$	$(0,\ 3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

(05) **(05)**

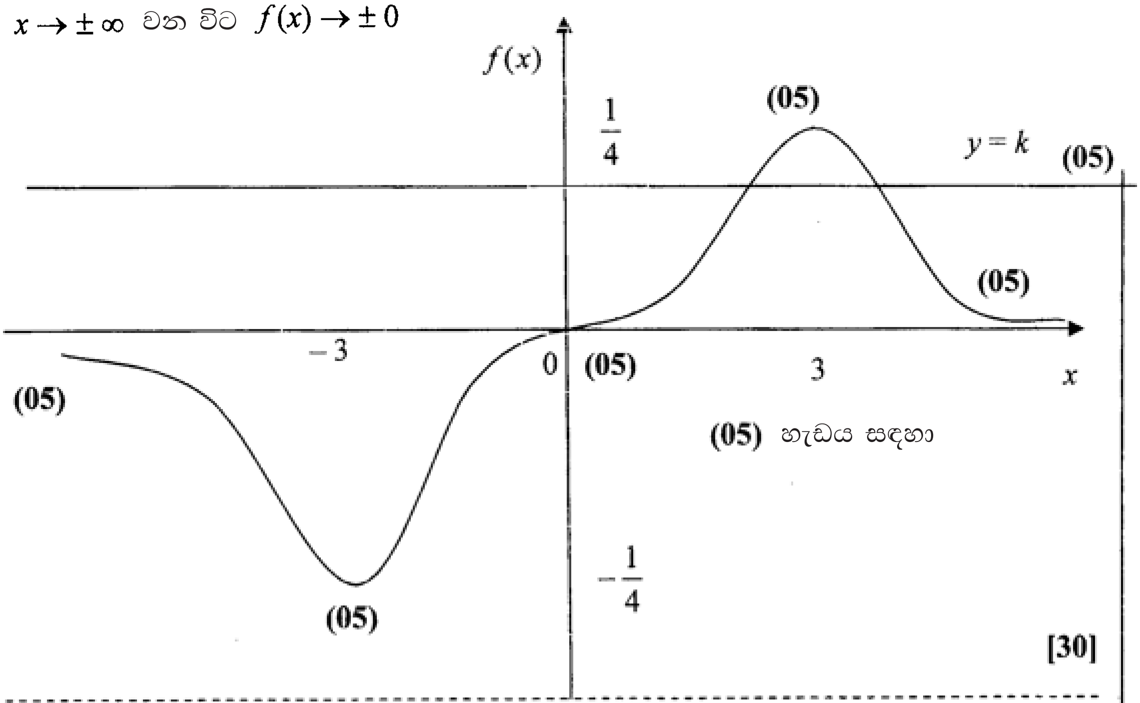
එබැවින්, $f(x)$ ට $x=-3$ හිදී අවමයක් හා $x=3$ හිදී උපරිමයක් තිබෙයි. **(05)**

$f(-3)=\dfrac{(-3)^3}{(-3)^4+27}=-\dfrac{1}{4}$ හා $f(3)=\dfrac{(3)^3}{(3)^4+27}=\dfrac{1}{4}$ වේ.

(05) **(05)**

එබැවින්, $f(x)$ හි අවම අගය හා උපරිම අගය පිළිවෙළින් $-\dfrac{1}{4}$ හා $\dfrac{1}{4}$ වේ. **[40]**

$x \to \pm\infty$ වන විට $f(x) \to \pm 0$



$y=k$ හා $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ සලකමු.

$y=k$ හා $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල පාටික යනු $kx^4-x^3+27k=0$ සමීකරණයේ විසඳුම් වේ. **(05)**
එබැවින්,

(i) $k=-\dfrac{1}{4}$ හෝ $\dfrac{1}{4}$ විට, $y=k$ රේඛාව $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ස්පර්ශ කරන අතර, ඒ නයින් $kx^4-x^3+27k=0$ ට තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබෙයි. **(05)**

(ii) $k=0$ විට $y=k$ රේඛාව $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ඔස්සේ යන අතර ඒ නයින් $kx^4-x^3+27k=0$ සමීකරණය $x^3=0$ ට ඌනනය වන අතර එයට තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබෙයි. **(05)**

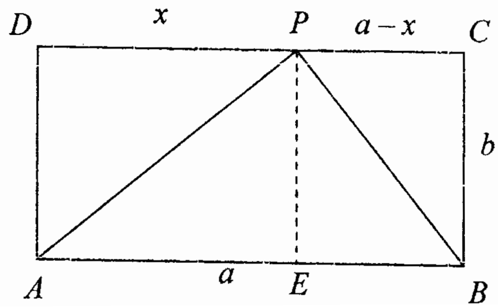
(iii) $-\dfrac{1}{4}<k<0$ හෝ $0<k<\dfrac{1}{4}$ විට, $y=k$ රේඛාව $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන අතර ඒ නයින් $kx^4-x^3+27k=0$ ට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙයි. **(05)**

(iv) $k<-\dfrac{1}{4}$ හෝ $k>\dfrac{1}{4}$ විට, $y=k$ රේඛාව $y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ වක්‍රය නොකපන අතර ඒ නයින් $kx^4-x^3+27k=0$ ට තාත්ත්වික මූල නොමැත. **(05)** **[30]**

(b) $L(x) = AP + PB$ **(05)**

$$= \sqrt{AE^2 + EP^2} + \sqrt{BE^2 + EP^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad \textbf{(05)}$$



[10]

$$\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{x\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - (a-x)\sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + b^2}\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$$= 0 \Rightarrow x\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - (a-x)\sqrt{x^2 + b^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2\{(a-x)^2 + b^2\} = (a-x)^2\{x^2 + b^2\} \Rightarrow x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}. \quad \textbf{(05)}$$

x හි පරාසය	$0 \le x < \frac{a}{2}$	$x = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} < x \le a$
$L'(x)$	$-$	0	$+$

(05)

$x = \frac{a}{2}$ විට, $L(x)$ අවම වේ. **(05)**

අවම දිග $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2}$

(05) **(05)**

මෙය වන්නේ P ලක්ෂ්‍යය CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන විට ය. **(05)** **[35]**

P ලක්ෂ්‍යය D හි හෝ C හි පිහිටන විට $L(x)$ උපරිම වන අතර මෙම අවස්ථාවේදී

$L(x) = b + \sqrt{a^2 + b^2}$ වේ. **(05)** **[05]**

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (a) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\,dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int x^3 \tan^{-1} x\,dx$ සොයන්න.

(c) භින්න භාග යොදගනිමින් $\int \frac{2x^2 - 3}{(x-2)^2 (x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(a) $\int_0^{\pi} \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) dx = \int_0^{\pi} \left\{(1-\cos^2 x)\sin x - (1-\sin^2 x)\cos x\right\} dx$ **(05)**

$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

(05) **(05)** **(05)** **(05)** **(05)** **[30]**

වෙනත් ක්‍රමයක් :

(a) $\int_0^{\pi} \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)dx$

$= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} (\sin x + \sin^2 x \cos x - \cos x - \cos x^2 \sin x)\,dx$ **(05)**

$= \left[-\cos x + \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

(05) **(05)** **(05)** **(05)** **(05)** **[30]**

$$(b)\ \int x^3 \tan^{-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

(05) **(05)**

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int \frac{(x^2+1)^2-(2x^2+1)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

(10)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{2(x^2+1)-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

(10)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

(05) **(05)**

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\tan^{-1} x + C;$$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(10) **[50]**

$$(c)\ \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1};$$ මෙහි A, B, C හා D යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. **(05)** **(05)** **(05)**

$$2x^2-3 \equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$x=2$ ගැනීමෙන් $B=1$ ලැබෙයි. **(05)**

නියත පද සැසඳීමෙන් $-3=-2A+B+4D$ ලැබෙයි.

x^3 පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0=A+C$ ලැබෙයි.

x පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0=A+4C-4D$ ලැබෙයි. **(10)**

$-3=-2A+B+4D$ හි $B=1$ යැයි යෙදීමෙන් $-2=-A+2D \rightarrow (1)$ ලැබෙයි.

$0=A+4C-4D$ හි $C=-A$ යැයි යෙදීමෙන් $0=3A+4D \rightarrow (2)$ ලැබෙයි.

(1) හා (2) න් $D=-\frac{3}{5}$ හා $A=\frac{4}{5}$ යැයි ලැබෙයි.

(05) **(05)**

$C = -\frac{4}{5}$ **(05)**

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4x+3}{5(x^2+1)}.$$

$$\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} - \frac{1}{5}\int \frac{4x+3}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)}$$

(05) **(05)**

$$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\tan^{-1} x + K;$$ මෙහි K යනු

(10) අභිමත නියතයකි. **[70]**

16 වන ප්‍රශ්නය

16. (a) සමාන්තර නොවන $l_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ හා $l_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ යන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.

$2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය, $4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය ම බව පෙන්වන්න.

(b) g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.

$y+5=0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් හා $x^2+y^2-4=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් (1, 1) ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වෘත්ත දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

(a) $P_0(x_0, y_0)$ යනු රේඛා දෙකෙහි සිට එකම දුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P_0 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවලට ඇති ලම්බ දුර පිළිවෙළින්

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}} \quad \text{හා} \quad \frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}} \quad \text{වේ.}$$

(05) **(05)**

මෙම දුරවල් එකම බැවින්

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ ලැබෙයි.

(05)

n හා m සංඛ්‍යා දෙකක නිරපේක්ෂ අගයන් සමාන නම් එවිට, $n=m$ හෝ $n=-m$ වේ.

ඉහත කරුණ යෙදීමෙන් $\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ ලැබෙයි.

එබැවින් $l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක

$$\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ සමීකරණ සපුරාලයි. **(05)**

$l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටන සේ $P(x, y)$ ලක්ෂ්‍යයක් විචලනය වේ නම් එවිට, P යනු $l_1=0$ හා $l_2=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදක මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි.

එබැවින්, කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ වේ. **(05)** **[25]**

$2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$$\frac{2x-11y-10}{\sqrt{2^2+(-11)^2}} = \pm\frac{10x+5y-2}{\sqrt{10^2+5^2}}$$ වේ. **(05)**

එනම්, $2x-11y-10=\pm(10x+5y-2) \Rightarrow x+2y+1=0$ හෝ $2x-y-2=0$ වේ.

(05) **(05)**

θ යනු $2x-11y-10=0$ හා $x+2y+1=0$ රේඛා අතර කෝණය යැයි ගනිමු.

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{11}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{3}{4} < 1$$ වේ. **(05)**

එබැවින් $2x-11y-10=0$ හා $10x+5y-2=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x+2y+1=0$ වේ. **(05)**

$4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ රේඛාවල කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$$\frac{4x-7y-8}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\pm\frac{8x+y-4}{\sqrt{8^2+1^2}}$$ වේ. **(05)**

එනම්, $4x-7y-8=\pm(8x+y-4)\Rightarrow x+2y+1=0$ හෝ $2x-y-2=0$ වේ.
(05) **(05)**

ϕ යනු $4x-7y-8=0$ හා $x+2y+1=0$ රේඛා අතර කෝණය යැයි ගනිමු.

එවිට, $$\tan\phi=\left|\frac{\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{3}{2}>1$$ වේ. **(05)**

එබැවින්, $4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර

මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x+2y+1=0$ වේ. **(05)** **[50]**

(b) $P_0(x_0, y_0)$ යනු $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ හා $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

එවිට, $x_0{}^2+y_0{}^2+2gx_0+2fy_0-r^2=0\rightarrow(1)$ හා $x_0{}^2+y_0{}^2-r^2=0\rightarrow(2)$ යැයි ලැබේ.

$(1)-(2)\Rightarrow 2gx_0+2fy_0=0\Rightarrow gx_0+fy_0=0$ වේ. **(05)**

එබැවින්, ඡේදන ලක්ෂ්‍ය $gx+fy=0$ රේඛාව මත පිහිටයි. **(05)**

මෙම රේඛාව මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බැවින් හා $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යය බැවින් g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-r^2=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරයි. **(05)** **[15]**

---

g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $x^2+y^2-4=0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරයි. **(05)**

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තයේ අරය $\sqrt{g^2+f^2+4}$ වේ. **(05)**

$(-g,-f)$ කේන්ද්‍රයේ සිට $y+5=0$ රේඛාවට දුර $|-f+5|$ වේ. **(05)**

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $y+5=0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන බැවින්

$$\sqrt{g^2+f^2+4}=|-f+5|\Rightarrow g^2+f^2+4=f^2-10f+25\Rightarrow g^2+10f-21=0\rightarrow(1)$$
(05)

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ වෘත්තය $(1,\,1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යයි නම්

$1+1+2g+2f-4=0 \Rightarrow g+f=1$ යැයි ලැබෙයි. **(05)**

$g+f=1$ යැයි (1) හි ආදේශයෙන්

$g^2-10g-11=0 \Rightarrow (g-11)(g+1)=0 \Rightarrow g=11$ හෝ -1 වේ.

(05) **(05)**

$g=11$ විට $f=-10$ වේ. **(05)**

$g=-1$ විට $f=2$ වේ. **(05)**

g හා f සඳහා අගය කුලක දෙකක් ඇති බැවින් වෘත්ත දෙකක් පවතී. **(05)** **[50]**

වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ

$x^2+y^2+22x-20y-4=0$ හා $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ වේ.

(05) **(05)** **[10]**

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ බව සාධනය කරන්න.

$$a = (b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

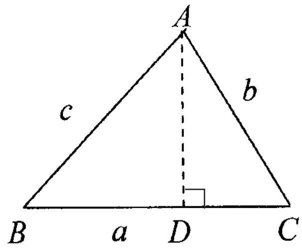
(*b*) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(c) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$ යන්න, $a + b\cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.

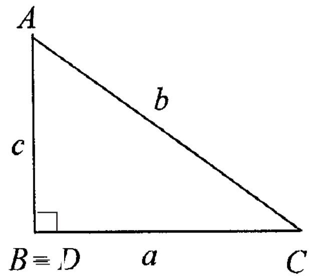
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

$$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

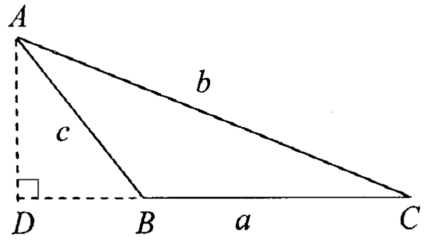
(a)



(i) ABC සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයකි.



(ii) ABC සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණයකි.



(iii) ABC මහා කෝණී ත්‍රිකෝණයකි.

$AD = AB\sin B = AC\sin C$, $AD = AB\sin B = AC\sin C$, $AD = AB\sin(\pi - B) = AC\sin C$

$\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ **(05)**

මෙලෙසම $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ බව පෙන්විය හැකිය. **(05)**

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ **[20]**

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b-c}{\sin B - \sin C}$. **(05)**

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{b-c}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

(05) **(05)** **(05)**

$a = (b-c)\cos\dfrac{A}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{B-C}{2}$. **(05)** **[25]**

(b) $k = \tan\theta - 2\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ යැයි ගනිමු.

$= \tan\theta - 2\dfrac{\tan\theta - 1}{1+\tan\theta} = \dfrac{\tan^2\theta - \tan\theta + 2}{1+\tan\theta}$

(05)

එනම්, $\tan^2\theta - (k+1)\tan\theta + 2 - k = 0$ වේ. **(05)**

$(k+1)^2 - 4(2-k) \geq 0$ ම නම් පමණක් මෙම සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් තිබෙයි. **(05)**

එනම්, $k^2 + 6k - 7 \geq 0$ ම නම් පමණක් **(05)**

එනම්, $(k+7)(k-1) \geq 0$ ම නම් පමණක් **(05)**

එනම්, $k \leq -7$ හෝ $k \geq 1$ ම නම් පමණක් **(05)**

එබැවින්, θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකිය. **[30]**

(c) $5\cos^2\theta+18\cos\theta\sin\theta+29\sin^2\theta$

$=\frac{5}{2}(1+\cos 2\theta)+9\sin 2\theta+\frac{29}{2}(1-\cos 2\theta)$ **(05)**

$=17-12\cos 2\theta+9\sin 2\theta$

$=17-15\left(\frac{4}{5}\cos 2\theta-\frac{3}{5}\sin 2\theta\right)$ **(05)**

$=17-15(\cos\alpha\cos 2\theta-\sin\alpha\sin 2\theta)$; මෙහි $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ වේ.
(05) **(05)**

$=17-15\cos(2\theta+\alpha)$; මෙහි $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ වේ.
(05)

$=a+b\cos(2\theta+\alpha)$; මෙහි $a=17$, $b=-15$ වන අතර $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ වන පරිදි

α වේ. **[25]**

$8(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x+5\sin x)^2=19$

$8(\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x)+2(\cos^2 x+10\cos x\sin x+25\sin^2 x)=19$
(05) **(05)**

$10\cos^2 x+36\cos x\sin x+58\sin^2 x=19$ **(05)**

$5\cos^2 x+18\cos x\sin x+29\sin^2 x=\frac{19}{2}$ **(05)**

$17-15\cos(2x+\alpha)=\frac{19}{2}$; මෙහි $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ වන පරිදි α වේ.
(05) **(05)**

$15\cos(2x+\alpha)=17-\frac{19}{2}=\frac{15}{2}$ **(05)**

$\cos(2x+\alpha)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$2x+\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ මෙහි n යනු නිඛිලයක් වේ.
(05) **(05)**

$x=n\pi-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{6}$; මෙහි n යනු නිඛිලයක් වන අතර $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ හා $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

වන පරිදි α වේ. **(05)** **[50]**