2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} (2r+1) = n(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ විට, ව. පැ. $= \sum_{r=1}^{1} (2r+1) = 3$ හා

ද. පැ. $= 1(1+2) = 3$

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම k ධන නිඛිලයක් ගෙන, $n = k$ සඳහා දී ඇති ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^{k} (2r+1) = k(k+2)$ 5

දැන් $\sum_{r=1}^{k+1} (2r+1) = \sum_{r=1}^{k} (2r+1) + [2(k+1)+1] = k(k+2) + 2k + 3$ 5

$= k^2 + 4k + 3 = (k+1)(k+3)$ 5

$\therefore$ දී ඇති ප්‍රතිඵලය $n = k$ ට සත්‍ය නම්, එය $n = k+1$ ට ද සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා දී ඇති ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහාම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 95%ක්ම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇතත් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 51%කට සීමා වී තිබේ. එනම් එම අපේක්ෂකයින්ට සාමූහිකව හිමි කර ගත හැකිව ඇත්තේ ලැබිය හැකිව තිබූ උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයෙන් අඩකට ආසන්න ප්‍රමාණයක් පමණි. සමහර අයදුම්කරුවන් සපයා තිබූ පිළිතුරුවල කැපී පෙනෙන දුර්වලතාවක් වූයේ $n = k$ (මෙහි k ධන නිඛිලයකි.) සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කිරීමේදී $\sum_{r=1}^{k} (2r+1) = k(k+2)$ වෙනුවට $\sum_{r=1}^{k} (2k+1) = k(k+2)$ ලෙස සදොස්ව ලියා තිබීමයි. තවද සාධනය සම්පූර්ණ කිරීම සඳහා පිළිතුර අවසානයේදී "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව දී ඇති ප්‍රකාශය සත්‍ය බව" ලිවිය යුතුව තිබුණ ද බොහෝ පිළිතුරුවල ඒ බව සඳහන් නොවීම නිසා මුළු ලකුණු අහිමි වී තිබෙනු දක්නට ලැබිණි. "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය" යොදා ගනිමින් දී ඇති ප්‍රතිඵලයක් ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේ හැකියාව අයදුම්කරුවන් සතුව තිබුණ ද, එම ක්‍රියාවලියට අයත් පියවර සියල්ල නිවැරදිව, තර්කානුකූලව හා අනුපිළිවෙළින් ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් හුරුවී නොතිබීම මෙම තත්ත්වයට හේතුවිය හැකිය. "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය" යනු කුමක් දැයි සිසුනට නිවැරදිව අවබෝධ කරවීමේ වැදගත්කම විෂයය ඉගැන්වීමේදී අවධානයට යොමු විය යුතු වේ.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $\dfrac{2x+1}{3x-1} \geq 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගය සොයන්න.

$$\frac{2x+1}{3x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-(3x-1)}{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x-1} \geq 0 \quad 5$$

	5	5	5
	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 2$	$2 < x$
$2 - x$	(+)	(+)	(−)
$3x - 1$	(−)	(+)	(+)
$\dfrac{2-x}{3x-1}$	(−)	(+)	(−)

විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x \leq 2\}$ 5

25

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් වැඩිම ප්‍රතිශතයක් එනම් 96%ක් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇතත් මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 27%කට සීමා වී තිබේ. වීජීය අසමානතා විසඳීම පිළිබඳ මූලික මූලධර්ම ඇසුරෙන් මෙම ප්‍රශ්නයට ඉතා පහසුවෙන් හා ඉක්මනින් පිළිතුරු සපයා, ඊට හිමි ලකුණු 25ම ලබා ගත හැකිව තිබුණ ද, වීජීය අසමානතා විසඳීමේදී නිවැරදිව හා තාර්කිකව පියවරෙන් පියවර ඉදිරියට යාමේ අවශ්‍යතාව නොසැපිරීම, ලකුණු අඩුවීමට හේතු වී තිබූ බව දක්නට ලැබුණි. නිසැකයෙන්ම ධන ව නොපවතින රාශියකින් අසමානතාවක දෙපසම ගුණ කිරීම (හරස් ගුණ කිරීම) බොහෝ අයදුම්කරුවන් විසින් කරන ලද බරපතල වරදකි. දී ඇති අසමානතාව විසඳීමේදී $3x - 1 = 0$ වන විට එහි වම් පස අර්ථ විරහිත වන නිසා $3x - 1 > 0$ වන අවස්ථාවත් $3x - 1 < 0$ වන අවස්ථාවත් (එනම් $x > \frac{1}{3}$ සහ $x < \frac{1}{3}$) වෙන වෙනම සැලකීම අත්‍යවශ්‍ය වෙයි. $x = \frac{1}{3}$ වන විට අසමානතාව නොපවතින බව සමහර අයදුම්කරුවන්ගේ අවධානයට යොමුව නැති නිසා විසඳුම් කුලකය ලිවීමේදී පවා $x = \frac{1}{3}$ ද විය හැකි ලෙස ගෙන තිබිණි. $x \neq \frac{1}{3}$ විය යුතු බව අවබෝධ කරගෙන නොතිබීම ඊට හේතුව වෙයි. ලකුණු දීමේ පටිපාටියේ දැක්වෙන ඉහත ක්‍රමයට අමතරව වෙනත් ක්‍රම භාවිත කිරීමෙන් වුව ද අසමානතාවෙහි විසඳුම් ලබා ගැනීමේ හැකියාව තිබිණි. ව්‍යුත්පන්න කර ගනු ලබන ප්‍රකාශයෙහි විචලනය පිරික්සීමෙන් අනතුරුව නිවැරදි විසඳුම් කුලකය පිළිතුරු ලෙස ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් පුරුදු වීම ද අවශ්‍ය වේ.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා අපරිමිත ශ්‍රේණියක පළමු පද n හි එකතුව $6 - \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙම ශ්‍රේණියෙහි n වෙනි පදය සොයා, ශ්‍රේණිය, අභිසාරී ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බව පෙන්වන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ශ්‍රේණියේ n වෙනි පදය a_n සහ $S_n = 6 - \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $a_n = S_n - S_{n-1}$ (5)

$$= \left\{6 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right\} - \left\{6 - \frac{2^{n}}{3^{n-2}}\right\}$$

$$= \frac{2^n}{3^{n-2}} \left\{-\frac{2}{3} + 1\right\} \quad (5)$$

$$= \frac{2^n}{3^{n-2}} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (5)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ යනු පළමුවන පදය 2 සහ පොදු අනුපාතය $\dfrac{2}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියකි. (5)

$\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. (5) $\boxed{25}$

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් අවම ප්‍රතිශතයක් එනම් 73%ක් පමණක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව ද 9% තරම් අවම මට්ටමකට පත්ව තිබීම දැඩි අවධානයට යොමු වීම අත්‍යවශ්‍ය වේ. මෙම ප්‍රශ්නය තුළ අඩංගු ගැටලුව ලෙස සැලකිය හැක්කේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය ඇසුරෙන් ප්‍රකාශිත ශ්‍රේණියක ලාක්ෂණික හඳුනාගැනීමයි. ශ්‍රේණියක මුල් පද n හි ඓක්‍යය දී ඇති විට n වන පදය සොයා ගැනීමේ සරල උපක්‍රමය, එනම්, $S_n - S_{n-1} = T_n$ යන්න භාවිත කළ හැකි බව දැන සිටීම ඒ සඳහා අවශ්‍ය වේ. අනතුරුව, ශ්‍රේණියේ n වන පදය T_n යන්න ar^{n-1} ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ විට අපරිමිත ශ්‍රේණිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් වන බව ද එහි පොදු අනුපාතය r, $|r| < 1$ අසමානතාව සපුරාලන විට ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව ද අපේක්ෂකයින් දැන සිටිය යුතු අතර එහි නොවක් භාවිතයක් ලෙස මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම සැලකිය හැකි වේ.

සමහර අපේක්ෂකයන් ශ්‍රේණියේ පදවල එකතුවට පිළිවෙළින් $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ආදේශයෙන් S_1, S_2, S_3, S_4 සොයා එමගින් ශ්‍රේණියේ මුල් පද තුන ලබාගෙන, එම ශ්‍රේණිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බවට කරුණු ඉදිරිපත් කර තිබූ නමුදු එය ප්‍රමාණවත් සාධනයක් ලෙස නොසැලකිය හැකි වේ. සමහර අපේක්ෂකයන් $\lim_{n \to \infty} S_n = 6$ (පරිමිත) බව පෙන්වීම මගින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වීම පිළිගත හැකි වේ.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{20}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයෙහි x වලින් ස්වායත්ත පදය $\frac{969}{2}$ වේ.

a හි අගය සොයන්න.

ද්විපද ප්‍රමේයයට අනුව,

$$\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{20} = \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r\, x^{20-r} \left(\frac{a}{x^3}\right)^r$$ මෙහි $r = 0, 1, 2, ..., 20$ සඳහා ${}^{20}C_r = \frac{20!}{r!\ (20-r)!}$ වේ. 5

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r\, a^r x^{20-4r}$$

x වලින් ස්වායත්ත පදය සඳහා $20 - 4r = 0$

$\therefore r = 5$ 5

x වලින් ස්වායත්ත පදය $\frac{969}{2}$ නිසා, ${}^{20}C_5\, a^5 = \frac{969}{2}$ 5

$$\Leftrightarrow \frac{20!}{15!5!} a^5 = \frac{969}{2} \Leftrightarrow a^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

5 5

25

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 85%ක් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ නමුදු එහි පහසුතාව 33%කට සීමා වී තිබිණි. බොහෝ අපේක්ෂකයන් ප්‍රසාරණයෙහි සාධාරණ පදය නිවැරදිව ලියා තිබූ නමුත් එහි සාධාරණ පදය ${}^{20}C_r\, a^r x^{20-4r}$ බව නිවැරදිව ලබා නොගැනීමත්, x වලින් ස්වායත්ත පදය සඳහා $r = 5$ බව නිවැරදිව ලබාගත් සමහර අපේක්ෂකයක් පවා ${}^{20}C_5$ යන්න නිවැරදිව සුළු නොකිරීමත් නිසා ලකුණු අහිමි කර ගෙන තිබිණි. ඉතා අඩු පියවර ගණනකින් නිවැරදි පිළිතුර කරා ඉක්මනින් ළඟා විය හැකි මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයා උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයක් උපයා ගැනීම කෙරෙහි අපේක්ෂකයන් යොමු විය යුතු වේ.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} \times \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2} \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1^2 \times (2) = \frac{1}{2}$$

5 5

$\boxed{25}$

---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්‍ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා අපේක්ෂකයන්ගෙන් 94%ක්ම පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 51%ක් විය. මෙය පහසුතාව වැඩිතම ප්‍රශ්න දෙක අතුරෙන් එකකි. වීජීය හා ත්‍රිකෝණමිතික සංයුක්ත ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීම පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් පිළිතුරු සැපයිය යුතු මෙම ප්‍රශ්නයේදී සීමාව පිළිබඳ නීති නිවැරදිව භාවිත කර නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතුවක් විය. සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල භාවිත ඇතුළත් අභ්‍යාසවලදී එම එක් එක් ප්‍රමේයය යොදා ගැනෙන අවස්ථා පැහැදිලිව නිරූපණය වන සේ ශ්‍රිතය සකස් කර ගැනීමේ පියවර පටිපාටිය නිවැරදිව ලියා දැක්විය යුතු වුව ද බොහෝ සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල ඒ බව දක්නට නොලැබීම අඩුපාඩුවක් මෙන්ම මුළු ලකුණු නොලැබීමට හේතුවක් ද විය. පිළිතුරෙහි අන්තර්ගත පියවර අනුක්‍රමය මගින්, නිගමනවලට එළඹීම සඳහා භාවිත ප්‍රමේය අනුපිළිවෙළින් නිරූපණය කෙරෙන මෙවැනි අභ්‍යාසවලදී විධිමත් ලෙස පිළිතුර ඉදිරිපත් කිරීමෙන් උපරිම ලකුණු ලබා ගැනීම කෙරෙහි අයදුම්කරුවන්ගේ අවධානය යොමු විය යුතු වේ.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $\dfrac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right\}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right\}=\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+1})}\left(1+\frac{1}{2}.\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

5 5

$$=\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+1})}.\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$ 5

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ බැවින්,

$$\frac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}\right\}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$ 5

$\therefore \int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

5

$\boxed{25}$

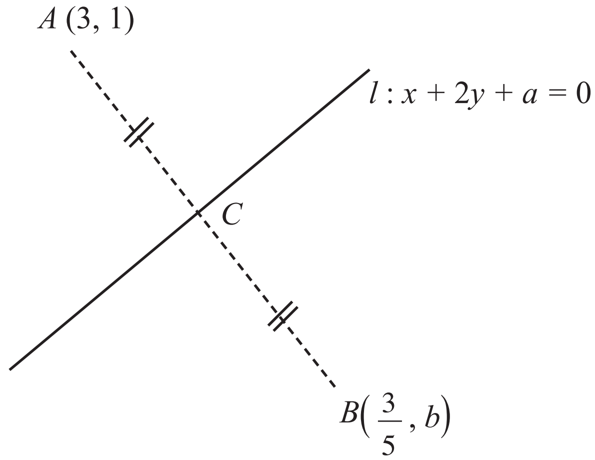
---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන්ගෙන් 90%ක් පිළිතුරු සපයා ඇති මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 36%කි. අවකලනයෙහි එන දාම නීතිය පිළිබඳව අවබෝධය ප්‍රමාණවත් නොමැතිවීම නිසා පූර්ණ වශයෙන් සාර්ථක පිළිතුරු ඉදිරිපත් කර තිබුණේ අල්ප වශයෙනි. අනුකලනයේ ඇති සම්මත ආකාර පිළිබඳ දැනුම අල්ප වීම ද ලකුණු අඩුවීමට බලපා ඇති තවත් කරුණකි. අනුකලනය කළ යුතු ප්‍රකාශනය සුදුසු පරිදි සකස් කර ගැනීමට නොහැකි වීම ද සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතු වී තිබිණි. තවද අනිශ්චිත අනුකලනයකදී අභිමත නියතය සඳහන් කර නොතිබීම නිසා ද බොහෝ අපේක්ෂකයන්ට උපරිම ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි විය. අවකලනයක විලෝමය ලෙස ඉදිරිපත් කෙරෙන සරල අනුකල ආශ්‍රිත අභ්‍යාසවල නිරතවීමෙන් සිසුන් ලබන අත්දැකීම් මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීම සඳහා ඉතා ප්‍රයෝජනවත් වේ.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $(3, 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $x + 2y + a = 0$ සරල රේඛාව මත ප්‍රතිබිම්බය $\left(\frac{3}{5}, b\right)$ ලක්ෂ්‍යය වේ. මෙහි a හා b නියත වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.



AB රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C නම්,

$$C = \left(\frac{3 + \frac{3}{5}}{2}, \frac{1+b}{2} \right) \quad 5$$

C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බැවින් $\frac{9}{5} + (1+b) + a = 0$ 5

$\therefore a + b = -\frac{14}{5}$ ....(1)

$AB \perp l$ බැවින්, $\left(\frac{b-1}{\frac{3}{5} - 3} \right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ 5

$\therefore b - 1 = -\frac{24}{5}$

$b = -\frac{19}{5}$ 5

$(1) \Longrightarrow a = 1$ 5

25

---

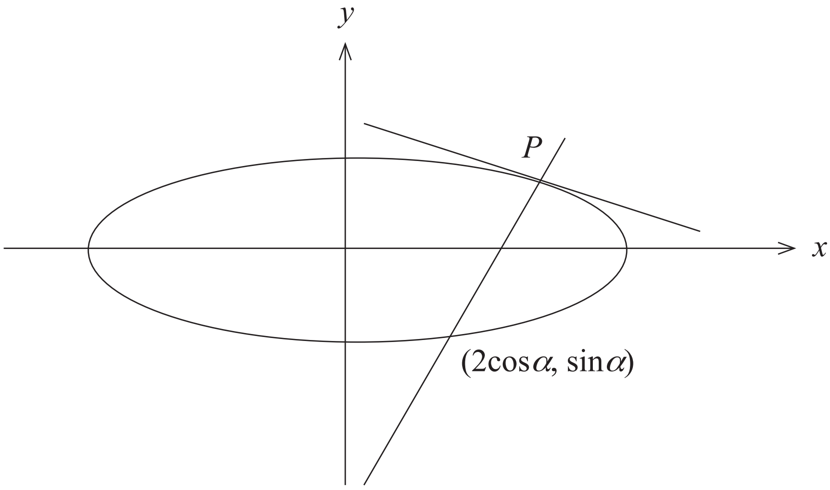
7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 89%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 32%කි. වීජීය ජ්‍යාමිතියෙහි එන සරල සිද්ධාන්ත ඇසුරෙන් පිළිතුරු සැපයිය හැකිව තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහිදී C හි ඛණ්ඩාංක b ඇසුරෙන් නිවැරදිව ලබාගෙන තිබුණ ද එම ඛණ්ඩාංක $x + 2y + a = 0$ හි ආදේශ කළ පසු a හා b අතර අනෙක් සම්බන්ධතාව ගොඩ නඟා ගැනීමට නොහැකිවීම හෝ නිවැරදිව සුළු කර නොතිබීම හෝ හේතුවෙන් a සහ b හි නිවැරදි අගය ලබා ගැනීමට බොහෝ අයදුම්කරුවන්ට නොහැකි වී තිබිණි. සරල රේඛාවක පරාමිතික නිරූපණය භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු ලබා ගත හැකිවේ. සරල රේඛාව පිළිබඳ මූලික සිද්ධාන්ත හුරු කරවීම සඳහා සරල අභ්‍යාසවල නිරතකරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය. මෙයට පිළිතුරු සැපයීමේදී අයදුම්කරුවන් මතකයේ තිබූ ප්‍රතිබිම්බය පිළිබඳ සූත්‍රය යොදා ගෙන විසඳා තිබූ අතර එයට වඩා මෙම ප්‍රශ්නයෙහි දී ඇති කරුණු අනුව රේඛාවක දෙපස ලක්ෂ්‍ය දෙක පිහිටන විට සපුරාලන අවශ්‍යතාව යොදා කදිම විසඳුම් ඉදිරිපත් කිරීමට උත්සාහ කිරීම මැනවි.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි. C වක්‍රයට $\theta = \frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයට, C වක්‍රය නැවත $\theta = \alpha$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමුවේ. $2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$



$\theta = \frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය P නම්,

$P \equiv \left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\theta}{2\sin\theta}$

5 5

P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$ 5

$\therefore$ P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්භයේ අනුක්‍රමණය $= 2$

P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්භයේ සමීකරණය : $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\left(x - \sqrt{2}\right)$ 5

$(2\cos\alpha, \sin\alpha)$ ලක්ෂ්‍යය මෙම රේඛාව මත පිහිටන බැවින්,

$\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2(2\cos\alpha - \sqrt{2})$

$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$ 5

$\boxed{25}$

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 77%ක් පමණක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 31%කි. මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමේදී, දෙනු ලබන වක්‍රයට එය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය ලබා ගැනීමත්, දී ඇති වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් හරහා එම අභිලම්බය ගමන් කිරීම හේතුවෙන් එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක මගින් අභිලම්බයේ සමීකරණය තෘප්ත කිරීමත් භාවිතයෙන් දී ඇති සම්බන්ධතාව ගොඩ නැගිය යුතුව තිබිණි. මෙය ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලිය තුළ නිතර හමුවන භාවිත අවස්ථාවක් වුව ද, පරාමිතික අවකලනය නිවැරදිව කර නොතිබීමත් පරාමිතියක් ඇසුරින් ඛණ්ඩාංක දෙනු ලැබූ ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන, දන්නා අනුක්‍රමණයක් සහිත සරල රේඛාවේ සමීකරණය ලබා ගැනීමේ දැනුම අඩුවීමත් පිළිතුරු සඳහා වන ලකුණු අඩුවීමට හේතු වී තිබිණි.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. අරය ඒකක 1ක් වූ ද, කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ සරල රේඛාව මත වූද, C වෘත්තයක්, $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරයි. C හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

අවශ්‍ය කරන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බැවින් එය t පරාමිතියක් ඇසුරින් $(t, -t)$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

කේන්ද්‍රය $(t, -t)$ සහ අරය ඒකක 1 වන වෘත්තයේ සමීකරණය,

$(x - t)^2 + (y + t)^2 = 1$ 5

$x^2 + y^2 - 2tx + 2ty + 2t^2 - 1 = 0$ 5

මෙය $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන බැවින්,

$2(t)(2) = (2t^2 - 1) + 3$ 5

එනම්, $2t^2 - 4t + 2 = 0$; $(t - 1)^2 = 0$

$\therefore$ $t = 1$ බැවින්, කේන්ද්‍රය $= (1, -1)$ 5

$\boxed{25}$

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 85%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 31%ක් විය. ලකුණු දීමේ පටිපාටියේ අපේක්ෂිත ආකාරයට සපයන ලද පිළිතුරු ඉතාමත් දුර්ලභ විය. බොහෝ අපේක්ෂකයන් කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සහ අරය ඇසුරින් වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගෙන තිබිණි. එහෙත් වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ වීමට තිබිය යුතු අවශ්‍යතාව නිවැරදිව භාවිත කර නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු අඩුවීමට හේතු වී තිබිණි.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ හා $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$ සහ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ බැවින්, $\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ සහ $\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 5

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta < 0$ බැවින්, $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 5

දැන් $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 5

තවද, $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ 5

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ 5

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 84%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 29%කට සීමා වී තිබිණි. අපේක්ෂකයන් බොහෝ දෙනෙකු θ කෝණය තුන්වන වෘත්ත පාදයේ කෝණයක් බව හඳුනා නොගෙන එය සුළු කෝණයක් ලෙස සලකා සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් ඇඳීමෙන් θහි කෝසයින් අගය ලබා ගෙන තිබිණි. එක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් දී ඇති විට තවත් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් සෙවීමේදී $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිත කිරීමට මෙන්ම θ කෝණය කුමන ප්‍රාන්තරයක පවතීද යන්න සලකා බලා ඒ අනුව එක් එක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයෙහි අගය ලබා ගැනීමේදී එම අගය ධන (+) ද (−) ද යන්න තීරණය කිරීමට ද සිසුන් හුරු කරවීමෙන් මෙම අඩුපාඩුව මඟ හරවා ගත හැකිය. වෘත්ත පාද නිවැරදිව හඳුනාගෙන නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතුවක් වී තිබිණි.

තවද බොහෝ අපේක්ෂකයන් ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍ය යෙදීම වෙනුවට සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක්, දෙන ලද කෝණයක් සඳහා නිර්මාණය කර එමගින් ඉතිරි ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම සාමාන්‍ය පුරුද්දක් බවට පත්වී තිබේ. දෙන ලද කෝණය සුළුකෝණයක් වන විට සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් අනෙක් අනුපාත ලබා ගැනීම සුදුසු වන අතර අනෙකුත් කෝණ සඳහා එය පවතින වෘත්ත පාදකය අනුව සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ සැලකිය හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11.(*a*) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.
$(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම්, a හා b වල අගයන් සොයන්න.
$f(x)$ හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.

(*b*) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද, γ හා δ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha-\beta)^2$ සොයා **ඒ නයින්**, m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma-\delta)^2$ ලියා දක්වන්න.
$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm)$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.
$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගයන් සොයන්න.

(*a*) $x-1$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින්, $f(1) = a + b - 11 + 6 = 0, \therefore\ a + b = 5$ —— (1) (10)

$f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -6 බැවින්, $f(4) = 64a + 16b - 44 + 6 = -6$ (10)

$\Longrightarrow 4a + b = 2$ —— (2)

(1) හා (2) න්, $a = -1, b = 6$ (5) $\boxed{25}$

---

(10)

දැන්, $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = (x-1)(-x^2 + 5x - 6) = -(x-1)(x^2 - 5x + 6)$
$= -(x-1)(x-2)(x-3)$ (5)

මේ අනුව අනෙක ඒකජ සාධක දෙක වන්නේ $(x-2)$ හා $(x-3)$ වේ. (5) $\boxed{20}$

(b)(i) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල බැවින් $\alpha + \beta = -b$ හා $\alpha\beta = c$ වේ.
(5) (5)

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$
(5) (5) $\boxed{20}$

සැසඳීමෙන්, $(\gamma-\delta)^2 = m^2 - 4n$ (5) $\boxed{05}$

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ බැවින්, $\alpha - \beta = -(\gamma-\delta) \Longrightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\gamma-\delta)^2 \Longrightarrow b^2 - 4c = m^2 - 4n$
(5) (5) (5) $\boxed{15}$

(b)(ii) $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = [\alpha^2 - \alpha(\gamma+\delta) + \gamma\delta][\beta^2 - \beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta]$ 5

$= [\alpha^2 + m\alpha + n][\beta^2 + m\beta + n]$ 5

$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta(\alpha+\beta)m + n(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta m^2 + mn(\alpha+\beta) + n^2$ 5

$= c^2 - bcm + n(b^2 - 2c) + cm^2 - mnb + n^2$ 5

$= (c^2 - 2cn + n^2) + (b^2n - bcm - mnb + cm^2)$

$= (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm)$ 5

25

$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් පවතින්නේ,

$(\alpha = \gamma$ හෝ $\delta)$ හෝ $(\beta = \gamma$ හෝ $\delta)$ ම නම් පමණි. 5

$\Leftrightarrow \quad (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad (c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ 5

20

$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් පවතින්නේ නම් ම පමණක් $(c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ 5

මෙහි $b = 10, c = k, m = k$ සහ $n = 10$ වේ. 5

$(k-10)^2 = (k-10)(100-k^2)$

$\Leftrightarrow \quad (k-10)[k^2 + k - 110] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (k-10)(k-10)(k+11) = 0$ 5

එමගින් $k = 10$ හෝ $k = -11$ 5

20

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) සිසුන් 15 ක ශිෂ්‍ය සභාවක් විද්‍යා සිසුන් 3 දෙනකුගෙන්, කලා සිසුන් 5 දෙනකුගෙන් හා වාණිජ සිසුන් 7 දෙනකුගෙන් සමන්විත ය. ව්‍යාපෘතියක වැඩ කිරීම සඳහා මෙම ශිෂ්‍ය සභාවෙන් සිසුන් 6 දෙනකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) සිසුන් 15 දෙනාම තෝරා ගැනීම සඳහා සුදුසු නම්,

(ii) කිසියම් සිසුන් දෙදෙනකුට එකට වැඩ කිරීම සඳහා අවසර නොමැති නම්,

(iii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනකු බැගින් තේරීමට අවශ්‍ය නම්,

මෙය සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ඉහත (iii) යටතේ තෝරා ගත් කණ්ඩායමක්, එම කණ්ඩායමෙහි විද්‍යා විෂය ධාරාවෙන් වූ සිසුන් දෙදෙනාට එක ළඟ වාඩිවීමට අවසර නොමැති නම්, වෘත්තාකාර මේසයක් වටේට වාඩි කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\left| S_n - \dfrac{1}{4} \right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in \mathbb{Z}^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

(*a*)

S	A	C
3	5	7

(i) $^{15}C_6 = \dfrac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 91 \times 55 = 5005$

5 5 5

15

(ii) විශේෂ සිසුන් දෙදෙනාම අන්තර්ගත වන පරිදි තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\} = {}^{13}C_4 = 715$ 5

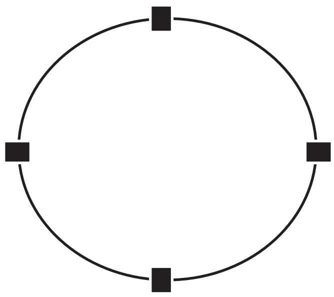
10

(iii) විශේෂිත සිසුන් දෙදෙනාම එකවර අන්තර්ගත නොවන පරිදි තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Bigg\} = {}^{15}C_6 - {}^{13}C_4 = 5005 - 715 = 4290$

5 5 $\boxed{25}$

(iiii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනකු බැගින් තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Bigg\} = {}^{3}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2 = 3 \times 10 \times 21 = 630$

10 5 $\boxed{15}$



කලා සිසුන් දෙදෙනකු හා වාණිජ සිසුන් දෙදෙනකු (එනම් විද්‍යා නොවන සිසුන් හතර දෙනා) වෘත්තාකාර මේසයක් වටා වාඩි කරවිය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Bigg\} = 3!$ 5

ඉහත සිසුන් හතර දෙනා අතර විද්‍යා සිසුන් දෙදෙනාට මේසය වටා වාඩි විය හැකි ස්ථාන හතරක් ඇත. එම සිසුන් දෙදෙනාට වාඩි විය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන $\Bigg\} = {}^{4}C_2 \times 2$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $= 3! \times {}^{4}C_2 \times 2 = 72$ 5

5 $\boxed{20}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

සිසුන් 6 දෙනාටම වෘත්තාකාර මේසය වටා වාඩි විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\} = 5!$ 5

විද්‍යා සිසුන් දෙදෙනා එකළඟ සිටින පරිදි සිසුන් 6 දෙනාට මේසය වටා වාඩි විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Bigg\} = 4! \times 2$ 5

5

$\therefore$ අවශ්‍ය එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $= 5! - 4! \times 2 = 120 - 48 = 72$ 5 $\boxed{20}$

(b) $\dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2} = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$; $r \in \mathbb{Z}^+$

$\Longleftrightarrow$ $3(6r+1) = (A+B)\,9r^2 + (12A-6B)r + (4A+B)$; $r \in \mathbb{Z}^+$ 5

r^2 සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $A + B = 0$

r සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $12A - 6B = 18$ 10

r^0 සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $4A + B = 3$

$\therefore$ $A = 1$ 5 හා $B = -1$ 5 **25**

$f(r) = \dfrac{1}{(3r-1)^2}$ යැයි ගනිමු. එවිට $f(r+1) = \dfrac{1}{(3r+2)^2}$

$\therefore$ $U_r = f(r) - f(r+1)$

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$ 5

$r = 2$ විට $U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$ 5

$r = n$ විට $U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$ 5

$S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ 5 **20**

ඔව් ! 5 **05**

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{4}$ 5 මක් නිසාද $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(3n+2)^2} = 0$ 5

$\therefore$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. **10**

$$\left| S_n - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{(3n+2)^2} < 10^{-6} \quad 5$$

$\Leftrightarrow \quad (3n+2)^2 > 10^6$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad 3n+2 > 10^3$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad 3n > 998$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad n > 332\frac{2}{3}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ 5

$\therefore$ n හි කුඩාම නිඛිලමය අගය = 333 5

15

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{I}$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ යනු $\mathbf{Q}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම වන අතර $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

$\mathbf{A}$ යනු $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ වන පරිදි වූ 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ වේ.

$\mathbf{A}$ සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි මාපාංකය $|z|$ හා z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}z$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $|z - 3i|^2 = |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9$ හා $|1 + 3iz|^2 = 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1$ බව පෙන්වන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ වන්නේ $|z| < 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ හා $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

(*a*) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

මෙවිට $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}$ 5

$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{I}$, මෙහි $\lambda = 2$ වේ. 5 $\boxed{10}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

10

$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 5 $\boxed{15}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. 5

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 5$$

5

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{a+b}{\sqrt{2}} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-a+b}{\sqrt{2}} &= \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c+d}{\sqrt{2}} &= \frac{8}{\sqrt{2}} \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} a+b &= 2 \\ -a+b &= -8 \\ c+d &= 2 \\ -c+d &= 8 \end{aligned}} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 5 \\ b &= -3 \\ c &= -3 \\ d &= 5 \end{aligned} \quad 10$$

$\therefore \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 5 **30**

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ 10

$$\therefore \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad 10$$

$= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 10 **30**

(*b*) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 5 හා $\bar{z} = x - iy$ 5 **10**

$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z\,\bar{z}$ 5

5

$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy = 2i\mathrm{Im}z$ 5

5 **20**

$$|z-3i|^2 = (z-3i)(\overline{z-3i}) \quad 5$$

$$= (z-3i)(\bar{z}+3i) \quad 5$$

$$= z\bar{z} + 3i(z-\bar{z}) + 9 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9 \quad 5$$

$$|1+3iz|^2 = (1+3iz)\,(\overline{1+3iz})$$

$$= (1+3iz)\,(1-3i\bar{z})$$

$$= 1 + 3i(z-\bar{z}) + 9z\bar{z}$$

$$= 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1 \quad 10$$

30

$$|z-3i| > |1+3iz|$$

$$\Leftrightarrow \quad |z-3i|^2 > |1+3iz|^2 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9 > 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1 \quad 5$$

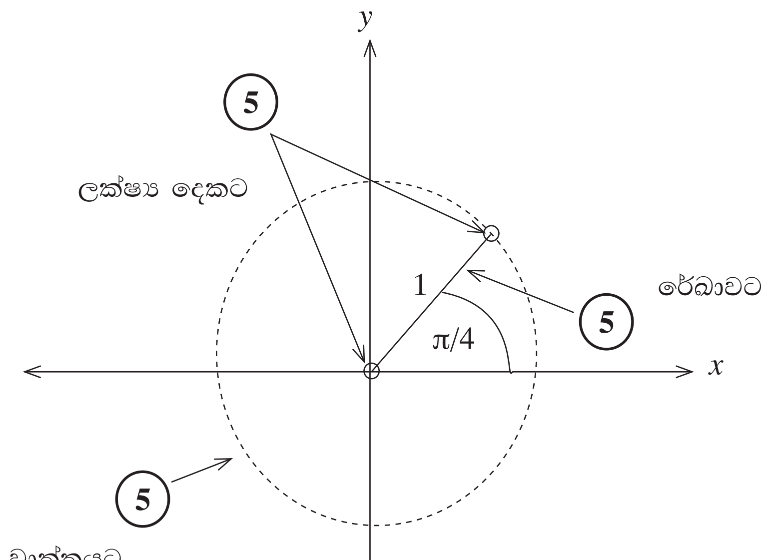
$$\Leftrightarrow \quad 8(|z|^2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 < 1 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad |z| < 1 \quad 5$$

20

$$|z-3i| > |1+3iz| \Leftrightarrow |z| < 1$$



15

---

14 වන ප්‍රශ්නය

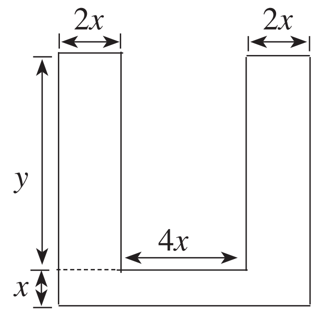
14. (*a*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = -\dfrac{x(x^3+2)}{(x^3-1)^2}$ බව පෙන්වා, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට $(0, 0)$ හා $\left(-2^{1/3}, -\dfrac{4^{1/3}}{3}\right)$ හිදී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පවතින බව **අපෝහනය** කරන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) මායිම සෘජුකෝණික ලෙස හමුවන සරල රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූපසටහනෙහි දැක්වේ. ගෙවත්තේ මාන මීටරවලින් එහි දක්වා ඇත. ගෙවත්තේ වර්ගඵලය $800\ \mathrm{m}^2$ බව දී ඇත. x ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර, මීටරවලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය P යන්න $P = \dfrac{800}{x} + 10x$ මගින් දෙන ලබන බව ද, පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ $0 < x < 10$ සඳහා පමණක් බව ද පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න.



(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(x^3-1)\,2x - x^2 . 3x^2}{(x^3-1)^2} \quad 10$$

$$= \frac{-x^4 - 2x}{(x^3-1)^2} = \frac{-x(x^3+2)}{(x^3-1)^2} \quad 5$$

$\boxed{15}$

5

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x^3 = -2$

$\Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = (-2)^{\frac{1}{3}}$ 5

x	$x < -2^{\frac{1}{3}}$	$-2^{\frac{1}{3}} < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
	$f(x)$ අඩුවේ.	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.

15

$x = 0$ දී $f(0) = 0$

$x = (-2)^{\frac{1}{3}}$ දී $f(-2^{\frac{1}{3}}) = \dfrac{\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^2}{-2-1} = \dfrac{-4^{\frac{1}{3}}}{3}$

$\therefore$ හැරුම් ලක්ෂ්‍යය $= (0, 0)$ හා $\left(-2\, ,\, -\dfrac{4^{\frac{1}{3}}}{3}\right)$ වේ.

5 5 **35**

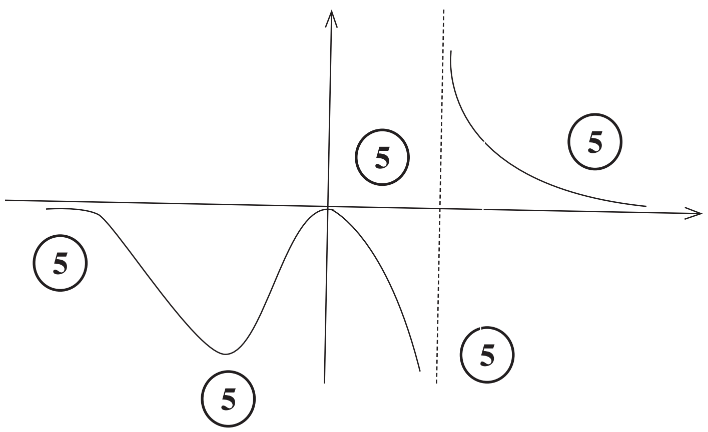
$x \longrightarrow +\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow -\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$x = 1$ දී $f(x)$ අර්ථ නොදැක්වේ.

$x \longrightarrow 1^{-}$ විට $f(x) \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow 1^{+}$ විට $f(x) \longrightarrow +\infty$



25

(*b*) රූපයේ අයුරු ගෙවත්තේ පරිමිතිය ; $P = 18x + 4y \longrightarrow (1)$ 5

ගෙවත්තේ වර්ගඵලය ; $800 = 4xy + 8x^2 \longrightarrow (2)$ 5

(2) න්, $y = \dfrac{200}{x} - 2x$ 5

$\therefore P = 18x + 4\left(\dfrac{200}{x} - 2x\right)$

$= 10x + \dfrac{800}{x}$ 5 **20**

$y = \dfrac{2(100 - x^2)}{x}$ 5

5 5

$y > 0$ සහ $x > 0$ බැවින්, $100 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$; ($x > 0$ නිසා)

$\therefore 0 < x < 10$ **15**

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 10 - \frac{800}{x^2} \qquad 10$$

$$5 \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{800}{x^2} = 0 \qquad 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{5} \quad 5 \qquad ; \; 0 < x < 10$$

25

x	$0 < x < 4\sqrt{5}$	$4\sqrt{5} < x < 10$
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 10 - \frac{800}{x^2}$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
	P අඩු වේ.	P වැඩි වේ.

10

$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$ විට අවම අගයක් ගනී.

$\therefore$ අවම පරිමිතිය $= 10 \times 4\sqrt{5} + \dfrac{800}{4\sqrt{5}}$

$= 40\sqrt{5} + 40\sqrt{5}$

$= 80\sqrt{5}$ m $\quad$ 5

15

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\int \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} \, dx$ සොයන්න.

(*c*) $a^2+b^2>1$ වන පරිදි $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a+\cos x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x} \, dx \quad \text{හා} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{b+\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x} \, dx$$

යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$bI - aJ$ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න.

(*a*) $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \, d\left(\frac{x^3}{3}\right) dx$ 5

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x - \frac{1}{3}\int x^3 . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$ 5 10

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\int x^2 \, d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$ 10

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left[x^2\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, 2x \, dx\right]$$ 5 5

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3} x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}(1-x^2)^{3/2} + C$$ 5 5

C යනු අභිමත නියතයකි. **50**

(*b*) $\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3}$ 5

$$\frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$ 10

$$x^2+3x+4 = A(x+1)^3 + B(x+1)^2(x-1) + C(x-1)(x+1) + D(x-1)$$

$x = 1;\quad 1+3+4 = 8A \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$x = -1;\quad 1-3+4 = -2D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

x^3 හි සංගුණක සැසඳීමෙන් ; $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන් ; $1 = 3A - B + 2B + C \Rightarrow C = -1$ 10

$$\therefore \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\int \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$ 5

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C$$ 20

C යනු අභිමත නියතයකි.

50

(c) $$aI + bJ = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow (1)$$

5 5 5

$$bI - aJ = \int_0^{\pi/2} \frac{ba+b\cos x-ab-a\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}\,dx \longrightarrow (2)$$ 5

$$= \ln(a^2+b^2+a\cos x+b\sin x)\Big|_0^{\pi/2},$$ 10 $a^2+b^2 > 1$ නිසා,

$$= \ln(a^2+b^2+b) - \ln(a^2+b^2+a)$$ 10

$$= \ln\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)$$

$$(1)\times a + (2)\times b \Rightarrow I = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{a\frac{\pi}{2} + b\ln\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)\right\}$$ 5

$$(1)\times b + (2)\times a \Rightarrow J = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{b\frac{\pi}{2} - a\ln\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)\right\}$$ 5

50

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. (*a*) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක හා අරය සොයා, xy තලය මත S වෘත්තයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

P යනු S වෘත්තය මත O මූලයෙහි සිට ඈතින් ම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වා S වෘත්තයට P ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වූ ස්පර්ශක රේඛාව වන l හි සමීකරණය $x + y = 2 + \sqrt{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

l රේඛාව ස්පර්ශ කරන S' වෘත්තයක්, S වෘත්තය P ගෙන් ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යයකදී බාහිර ව ස්පර්ශ කරයි. (h, k) යනු S' වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක යැයි ගනිමු. l රේඛාව අනුබද්ධයෙන් O හි හා S' හි කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සලකා බැලීමෙන්, $h + k < 2 + \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

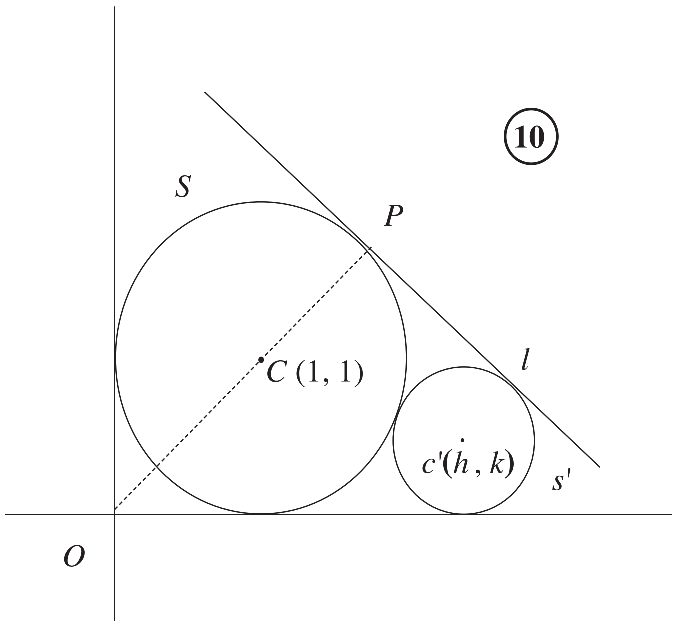
S' හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}\,(h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ සමීකරණය සපුරාලන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

5

$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $= (1, 1)$ 5 අරය $= 1$ 5

$\boxed{15}$



$\boxed{10}$

$OP = OC + CP = \sqrt{2} + 1$ (5, 5, 5) සහ $P \equiv \left(OP \cos\frac{\pi}{4}, OP \sin\frac{\pi}{4}\right)$ වන නිසා

$P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ වේ. 5

$\boxed{20}$

CP රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= 1$, 5 $OP \perp l$ නිසා l රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= -1$ 5

$\therefore$ l රේඛාවේ සමීකරණය $\left[y-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = -1\left[x-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ 10

$\Rightarrow x + y = 2 + \sqrt{2}$ 5

25

$(0, 0)$ හා (h, k) ලක්ෂ්‍ය දෙක $l : x + y -(2 + \sqrt{2}\ ) = 0$ රේඛාවේ එකම පැත්තේ පිහිටයි. 5

$\therefore$ $-(2 + \sqrt{2}\ )\left[\ h + k -(2 + \sqrt{2}\ )\ \right] > 0$ 5

$\Rightarrow h + k < 2 + \sqrt{2}$ 5

15

$C' \equiv (h, k)$ සිට l රේඛාවට ලම්බ දුර d නම්,

$d = \dfrac{|h + k - (2 + \sqrt{2})|}{\sqrt{2}}$ 10

$d = \dfrac{(2 + \sqrt{2}) - (h + k)}{\sqrt{2}}$ 5 ($h + k < 2 + \sqrt{2}$ නිසා)

S' වෘත්තය l රේඛාව ස්පර්ශ කරන බැවින් ඉහත ලම්බ දුර S' හි අරයට සමාන විය යුතුය. 10

S හා S' වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වන බැවින්

$CC' = 1 + d$ 10

$\Rightarrow CC'^{\,2} = (1 + d)^2$

$\Rightarrow (h - 1)^2 + (k - 1)^2 = \left[1 + \dfrac{(2 + \sqrt{2}) - (h + k)}{\sqrt{2}}\right]^2$ 10

$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k + 4 = [2 + 2\sqrt{2} - h - k]^2$

5 $= (2 + 2\sqrt{2}\ )^2 - 2(2 + 2\sqrt{2}\ )h - 2(2 + 2\sqrt{2}\ )k + 2hk + h^2 + k^2$ 10

$\Rightarrow h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}\ (h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ 5

65

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (***a***) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) \equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ සර්ව සාම්‍යය සාධනය කරන්න.

(***b***) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x+\theta)+b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a\,(>0)$, b හා $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.
$1 \le f(x) \le 5$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(***c***) $p > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.
ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙළින් $p+q$, p හා $p-q$ වේ.
$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(***a***) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$= \cos\alpha + \cos\beta - (\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma))$ 5

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 5 + 5

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\right]$ 5

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ 5

$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ $\boxed{25}$

(***b***) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$

$= (1-\cos x) + \sqrt{3}\sin x + 2(1+\cos x)$ 10

$= \sqrt{3}\sin x + \cos x + 3$

$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right] + 3$ 5

$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right] + 3$ 5

$= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$ 5

$a = 2,\ b = 3,\ \theta = \frac{\pi}{6}$ 10 $\boxed{35}$

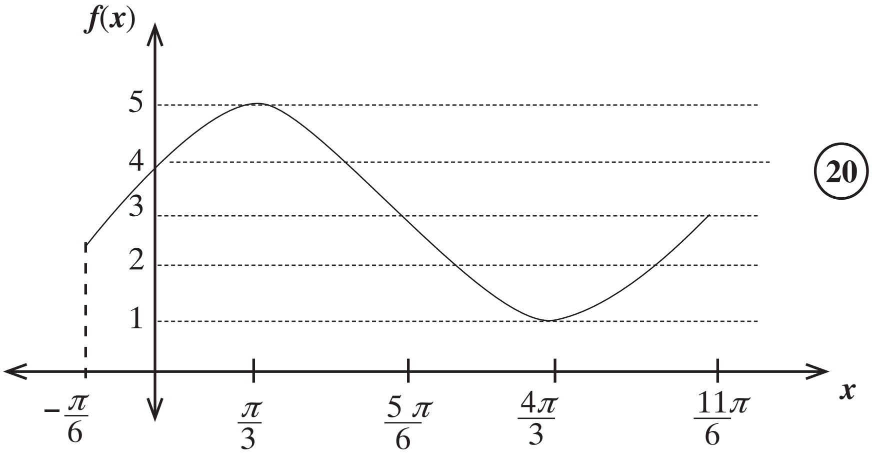
$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ (5)

$-2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$ (5)

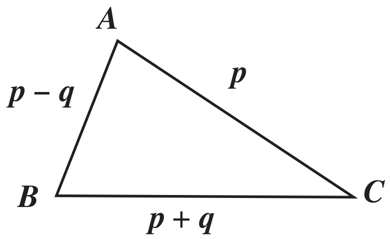
$-2 + 3 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \leq 2 + 3$

$1 \leq f(x) \leq 5$ (5)

15



20



සයින් නීතිය යෙදීමෙන්,

$\frac{\sin A}{p+q} = \frac{\sin B}{p} = \frac{\sin C}{p-q} = k$ යැයි සිතමු. (5)

(5) (5)

$\Rightarrow \sin A - 2\sin B + \sin C = k(p+q) - 2kp + k(p-q) = 0$ (10)

25

$\sin A + \sin C = 2\sin B$

(5)

$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin(\pi - \overline{A+C})$ (10)

$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \sin(A+C)$ (5)

$\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)$ (5)

$\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)$ (5)

$\left(0 < \frac{A+C}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \sin\left(\frac{A+C}{2}\right) > 0\right)$

30
