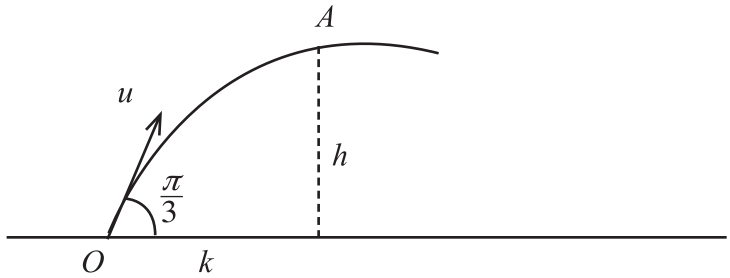
2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකින් ආනතව u වේගයකින් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව k දුරක් තිරස්ව ගමන් කළ විට O හි මට්ටමට ඉහළින් එහි සිරස් දුර h යැයි ගනිමු.

$\sqrt{3}k = h + \dfrac{2gk^2}{u^2}$ බව පෙන්වන්න.



O සිට A දක්වා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad k = \frac{u}{2}T$ .... (1) 5

$\uparrow \quad h = \frac{\sqrt{3}u}{2}T - \frac{1}{2}gT^2$ .... (2) 10

(1) න් හා (2) න්, $h = \sqrt{3}k - \frac{1}{2}g\left(\frac{2k}{u}\right)^2$ 5

$\Rightarrow \sqrt{3}k = h + \frac{1}{2}g\,\frac{4k^2}{u^2}$

$\Rightarrow \sqrt{3}k = h + \frac{2gk^2}{u^2}$ 5

25

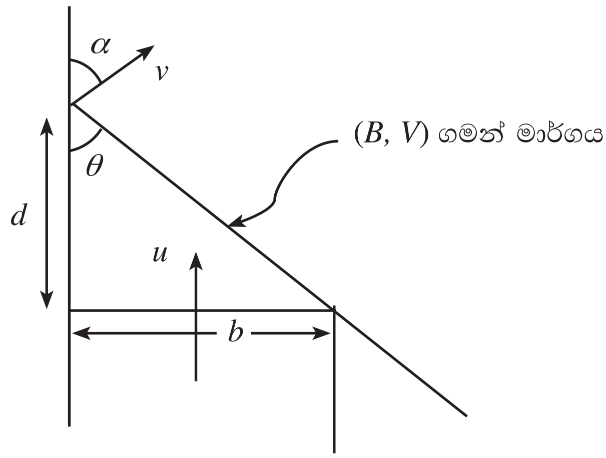
---

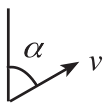
2 වන ප්‍රශ්නය

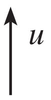
2. පළල b වූ වෑන් රථයක් ඒකාකාර u ප්‍රවේගයෙන් සෘජු පාරක් දිගේ පදික වේදිකාවට සමාන්තරව එහි ගැටී නොගැටී ගමන් කරයි. පිරිමි ළමයෙක් වෑන් රථයට d දුරක් ඉදිරියෙන් පදික වේදිකාවේ සිට පාරට බැස, වෑන් රථයේ චලිත දිශාව සමග α සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවට $v\ (< u \sec \alpha)$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ඇවිද යයි. ළමයා, වෑන් රථයෙහි නොහැපී, යන්තමින් බේරෙයි නම්, $bu = (b \cos \alpha + d \sin \alpha)\, v$ බව පෙන්වන්න.

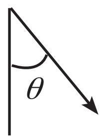
B - පිරිමි ළමයා

V - වෑන් රථය



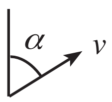
Vel (B, E) = 

Vel (V, E) = 

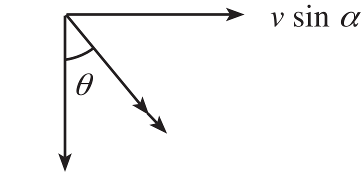
Vel (B, V) = 

5

Vel (B, V) = Vel (B, E) + Vel (E, V) 5

= 

+ 

= 

5

$$\tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{u - v \cos \alpha}$$ 5

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{d} = \frac{v \sin \alpha}{u - v \cos \alpha}$$ 5

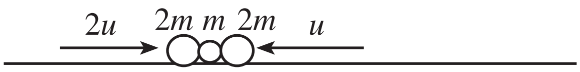
$$\Rightarrow \quad bu = (b \cos \alpha + d \sin \alpha)\, v$$

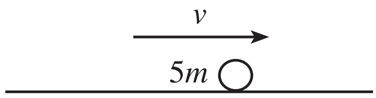
25

---

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇත. එක එකක ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශු දෙකක් මේසය මත ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට u හා $2u$ වේගවලින්, නිසල ව තිබෙන අංශුව දෙසට චලනය වෙමින් එය සමග එකවිට ගැටී හා වේ. ගැටුම්වලට පසු සංයුක්ත අංශුවේ වේගය සොයා, ගැටුම් නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය $\dfrac{23}{5}mu^2$ බව පෙන්වන්න.





පද්ධතියට $\mathbf{I} = \Delta(m\,\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්,

$$\longrightarrow \quad 0 = 5mv - (2m \times 2u - 2mu) \qquad 10$$

$$\therefore \quad v = \frac{2u}{5} \qquad 5$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(5m)v^2 - \frac{1}{2}(2m)(2u)^2 - \frac{1}{2}(2m)u^2 \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2}(5m)\left(\frac{2u}{5}\right)^2 - 4mu^2 - mu^2$$

$$= \frac{2mu^2}{5} - 5mu^2 = -\frac{23}{5}mu^2 \qquad 5$$

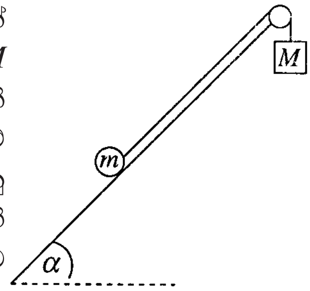
$\therefore$ චාලක ශක්ති හානිය $= \dfrac{23}{5}mu^2$

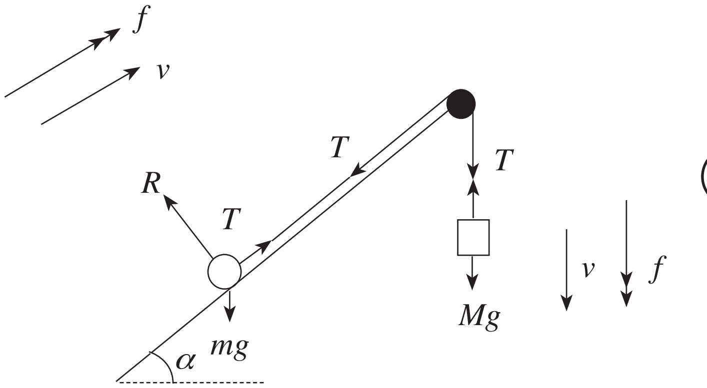
$\boxed{25}$

---

4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් තිරසට ආනතිය α වූ අචල සුමට තලයක් මත නිසලව ඇති අතර එය, තලයේ ඉහළ ම කෙළවරෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, නිදහසේ එල්ලෙන M $(M > m \sin \alpha)$ ස්කන්ධයකට සම්බන්ධ කර ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි, M ස්කන්ධය කප්පිය ආසන්නයේ තබා ආනත තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ තන්තුව තදව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුව තලය දිගේ ඉහළට d දුරක් චලනය වූ විට එහි වේගය v යන්න $(M + m) v^2 = 2\, gd\, (M - m \sin\alpha)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.





5

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

m ↗ $T - mg \sin \alpha = mf$ 5

M ↓ $Mg - T = Mf$ 5

$\therefore\ f = \dfrac{(M - m\sin\alpha)g}{(M + m)}$ 5

m ↗ $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්, $v^2 = 2(f)(d) = 2\ \dfrac{(M - m\sin\alpha)}{(M + m)}\, gd$

$\Rightarrow\ (M + m)v^2 = 2gd\,(M - m\sin\alpha)$ 5 $\boxed{25}$

විකල්ප විසඳුම

ඉහත රූප සටහනට 5

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්, $\dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 = Mgd - mgd\sin\alpha$ 15

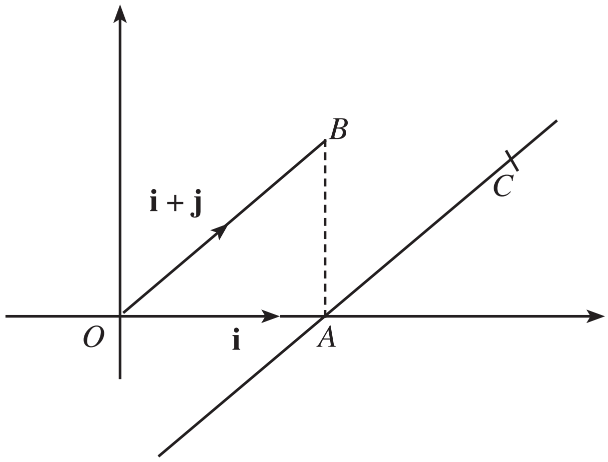
$= (M - m\sin\alpha)gd$

$\Rightarrow\ (M + m)v^2 = 2gd\,(M - m\sin\alpha)$ 5 $\boxed{25}$

---

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු A හරහා OB ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. OB ට BC ලම්බ වන පරිදි වූ λ හි අගය සොයන්න.



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ සහ $\overrightarrow{AC} = \lambda\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ — 5

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + \lambda\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

$= (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$ — 5

$BC \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$ .... (1) — 5

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\mathbf{i} - \mathbf{j} + (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$

$= \lambda\mathbf{i} + (\lambda-1)\mathbf{j}$ — 5

(1) න්

$\left[\lambda\mathbf{i} + (\lambda-1)\mathbf{j}\right].\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 0$

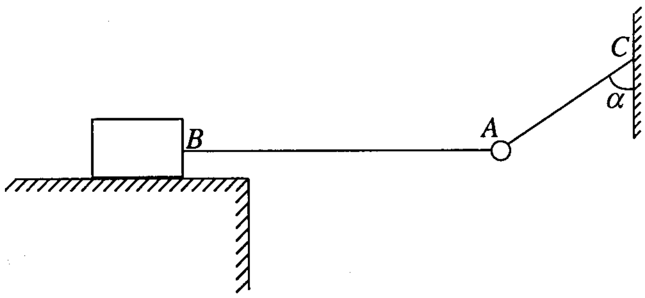
$\Rightarrow\ \lambda + (\lambda - 1) = 0$

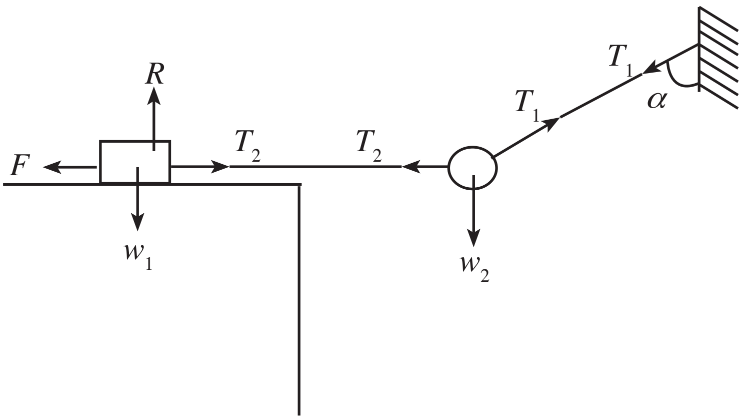
$\Rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$ — 5

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. රළු තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇති බර w_1 වූ ලී කුට්ටියක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය BC තන්තුවකින් සිරස් බිත්තියක් මත පිහිටි කුඩා අචල ඇණයකට රූපයෙහි දක්වා ඇති පරිදි සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ A ලක්ෂ්‍යයකදී බර w_2 වූ අංශුවක් ගැටගසා ඇත්තේ CA යටි අත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පරිදි ය. AB කොටස තිරස් නම් සහ කුට්ටිය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්, $\mu w_1 = w_2 \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු කුට්ටිය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.





5

w_1 $\uparrow$ $R = w_1$ 5

$F = \mu R = \mu w_1$ 5

පද්ධතියට $\longrightarrow$ $T_1 \sin\alpha = F$

w_2 $\uparrow$ $T_1 \cos\alpha = w_2$ 5

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{F}{w_2}$

$\Rightarrow w_2 \tan\alpha = \mu w_1$ 5

25

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයක අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(B \cup C) = \frac{1}{2}$ හා $P(C \cup A) = \frac{2}{3}$ යන සම්භාවිතා එකවිට තිබිය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

නොහැකි ය. (5)

A හා B අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$ .... (1)

එලෙසම, $P(B) + P(C) = \frac{1}{2}$ .... (2)

හා $P(C) + P(A) = \frac{2}{3}$ .... (3)

(5)

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow$

$2[P(A) + P(B) + P(C)] = \frac{5}{3}$

$\therefore P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{6}$ .... (4) (5)

A, B හා C නිරවශේෂ සිද්ධි බැවින්,

$A \cup B \cup C = \Omega$

$\therefore P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega) = 1$ .... (5) (5)

(4) හා (5) සමාන නොවන බැවින් ඉහත සම්භාවිතා සපුරාලන පරිදි

A, B හා C සිද්ධි පැවතිය නොහැකිය. (5)

25

8 වන ප්‍රශ්නය

8. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A\backslash B) = P(A\backslash B')$ නම් A හා B ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න; මෙහි B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

$P(A\backslash B) = P(A\backslash B')$ නම්,

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} \qquad [P(B) \neq 0,\ P(B') \neq 0] \qquad 5$$

$$= \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1 - P(B)} \qquad [P(B) \neq 0, 1 \text{ එනම් } 0 < P(B) < 1] \qquad 5$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) - P(B)\,P(A\cap B) = P(A)\,P(B) - P(B)\,P(A\cap B) \qquad 5$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \qquad 5$$

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත වේ. 5

$\boxed{25}$

---

9 වන ප්‍රශ්නය

9. පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ අටෙහි මධ්‍යන්‍යය හා මාතය පිළිවෙළින් 4 හා 6 වේ.

$$2,\ 3,\ 6,\ 2,\ 1,\ x,\ y,\ z$$

මෙහි x, y හා z තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. x, y හා z හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ අටෙහි සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

මධ්‍යන්‍යය 4 බැවින්,

$$2+3+6+2+1+x+y+z=4\times 8$$

$\therefore\ x+y+z=32-14=18$ .... (1) 5

මාතය 6 බැවින් අඥාත 3න් 2ක් වත් 6 විය යුතුය. 5

(1) ට අනුව අනෙක් අඥාතය ද 6 විය යුතුය. 5

$\therefore\ x=y=z=6$

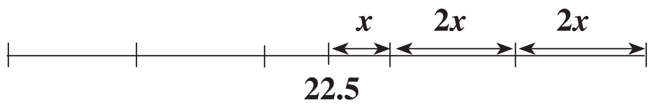
සම්මත අපගමනය $=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{4+1+4+4+9+3\times 4}{8}}$ 5

$=\sqrt{\dfrac{34}{8}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 5 **25**

10 වන ප්‍රශ්නය

10. සංඛ්‍යාත වගුවකට පළලින් සමාන පන්ති ප්‍රාන්තර පහක් ඇත. තෙවන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය 22.5 වේ. පස්වන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ උඩත් පන්ති මායිම 40 වේ. පළමුවන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිට අනුපිළිවෙළින් පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාත 7, 19, 27, 15 හා 2 වේ. ව්‍යාප්තියේ මාතය ගණනය කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම (පළල) $= 2x$ යයි ගනිමු.



$\therefore\ 5x = 40 - 22.5$ 5

$x = 3.5$ 5

මාතය ඇතුළත් වන්නේ 3 වන පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 19 - 26 ට ය. 5

$\therefore$ මාතය $= 19 + \left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) C,$ මෙහි $\Delta_1 = 27 - 19 = 8,\ \Delta_2 = 27 - 15 = 12,\ C = 7$ 5

$= 19 + \dfrac{8}{20} \times 7$

$= 21.8$ 5 **25**

---

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11.(*a*) අංශුවක්, අචල දෘඪ තිරස් ගෙබිමක වූ ලක්ෂ්‍යයකින් සිරස්ව උඩු අතට u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ චලනය වීමෙන් පසු එය ගෙබිම හා ගැටෙයි. අංශුව හා ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ වේ.

(i) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුව ගන්නා කාලය $\frac{2u}{g}(1 + e + e^2)$ බව පෙන්වන්න.

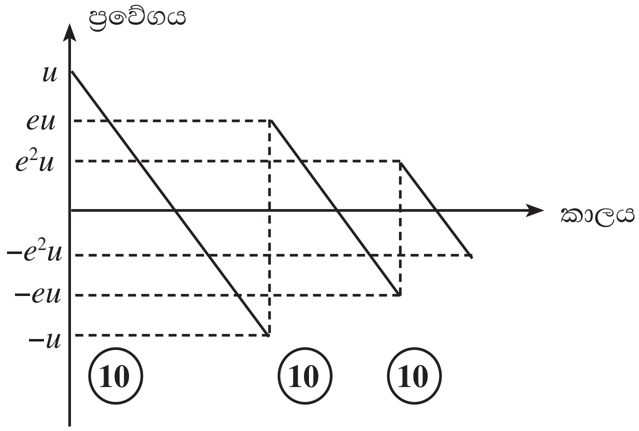
(iii) නිශ්චලතාවට පැමිණීමට අංශුව ගන්නා මුළු කාලය $\frac{2u}{g\,(1 - e)}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*b*) මුළු ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 300ක් වූ දුම්රියක්, එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{98}\right)$ ආනතියක් ඇති ඍජු දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ පහළට නියත වේගයෙන් චලනය වේ. දුම්රියේ ඉහළට චලිතය කෙරෙහි ඝර්ෂණ ප්‍රතිරෝධයේ විශාලත්වය, පහළට චලිතයේදී වූ නියත අගයේම පවතියි නම්, දුම්රිය නියත $54\ \text{km h}^{-1}$ වේගයකින් එම දුම්රිය මාර්ගයේ ම ඉහළට ඇදගෙන යාම සඳහා අවශ්‍ය ජවය 900 kW බව පෙන්වන්න.

දුම්රිය ඍජු තිරස් මාර්ගයක, කලින් තිබුණු විශාලත්වයම ඇති ප්‍රතිරෝධයක් සහිතව $18\ \text{km h}^{-1}$ ක වේගයකින් ගමන් කරන විට එන්ජිම මෙම ජවය සහිත ව ක්‍රියා කරන බව උපකල්පනය කරමින් දුම්රියෙහි ත්වරණය සොයන්න.

[ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.]

(*a*) (i)



(ii) පළමුවන ගැටුම සඳහා ගතවන කාලය T_1 යැයි ගනිමු.

$T_1/2 = u/g \Rightarrow T_1 = 2u/g$ (5)

පළමුවන ගැටුමේ සිට දෙවන ගැටුම දක්වා කාලය

$T_2 = 2eu/g$ (5)

දෙවන ගැටුමේ සිට තුන්වන ගැටුම දක්වා කාලය

$T_3 = 2e^2u/g$ 5

තුන්වන ගැටුම දක්වා ගතවන මුළු කාලය $= T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2)$ 5

(iii) අංශුවට නිශ්චලතාවට පත්වීම සඳහා ගතවන කාලය

$= T_1 + T_2 + T_3 + \dots$ 5

$= \dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2 + e^3 + \dots)$ 5

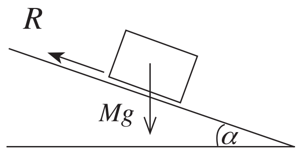
$= \dfrac{2u}{g}\sum_{r=0}^{\infty} e^r$ 5

$= \dfrac{2u}{g}\dfrac{1}{(1-e)}$ 5

$= \dfrac{2u}{g(1-e)}$

70

(***b***) දුම්රියේ ස්කන්ධය $M = 300\,000$ kg



$\sin\alpha = \dfrac{1}{98}$

5

දුම්රිය ආනත තලය ඔස්සේ නියත ප්‍රවේගයෙන් පහළට චලනය වේ.

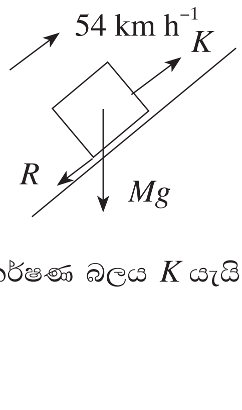
$\searrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

$Mg\sin\alpha - R = 0$ 10

$300\,000 \times 9.8 \times \dfrac{1}{98} - R = 0$

$R = 30\,000$ N 5

උඩු අත් චලිතය සඳහා



$V = 54 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{54 \times 1000}{60 \times 60}$

$V = 15 \text{ ms}^{-1}$ 5

ප්‍රකර්ෂණ බලය K යැයි ගනිමු. $\nearrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$K - R - Mg\sin\alpha = 0$ 10

$P = FV$ යෙදීමෙන්

ජවය, $P = (R + Mg \sin \alpha)\ V$

$= (30\,000 + 30\,000) \times\ 15 = 900\,000$

$= 900$ kW　5

40

ප්‍රවේගය　$V = 18 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{18\,000}{60 \times 60} \text{ m s}^{-1}$　5

$= 5 \text{ m s}^{-1}$

ප්‍රකර්ෂණ බලය　$= \dfrac{P}{V}$

$= \dfrac{900\,000}{5}$ N　10

$= 180\,000$ N　5

$\longrightarrow$ **F** = m**a**

$180\,000 - 30\,000 = 300\,000 \times a$; මෙහි a යනු ත්වරණය වේ.　10

ත්වරණය $= \dfrac{150\,000}{300\,000}$　5

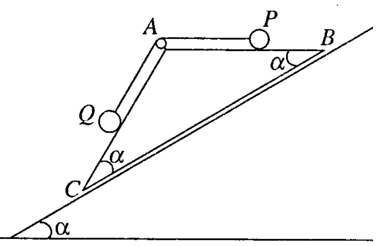
$a = \dfrac{1}{2} \text{ m s}^{-2}$　5

40

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12.(*a*) ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ වූ සිරස්කඩකි. AC හා BC රේඛා අදාළ මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා වන අතර BA හා AC රේඛා BC සමඟ සමාන $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ කෝණ සාදයි. තිරසට α කෝණයක ආනතියකින් යුතු අචල සුමට තලයක් මත BC අන්තර්ගත මුහුණත ඇතිව ද, AB තිරස්ව ද කුඤ්ඤය රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තබා ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m_1 හා m_2 වන P හා Q අංශු දෙකක්, පිළිවෙළින් AB හා AC මත තබා, A ශීර්ෂයෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව තදව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙහි සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



එක් එක් අංශුවේ කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව ත්වරණයත්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයත් නිර්ණය කිරීම සඳහා P අංශුවට BA දිගේ ද, Q අංශුවට AC දිගේ ද, මුළු පද්ධතියට BC දිගේ ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

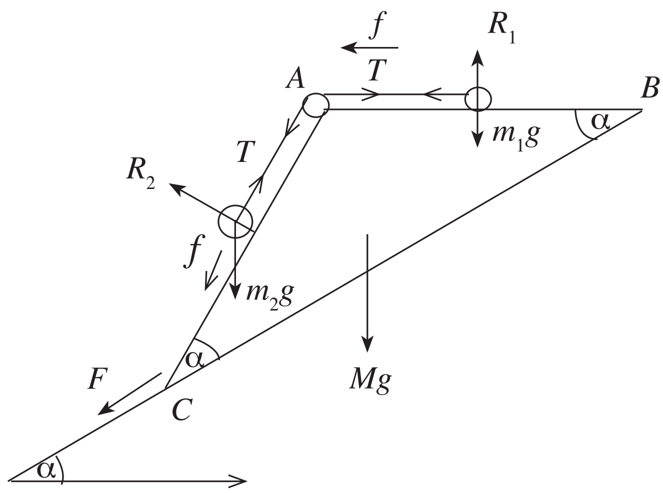
$m_1 = m_2$ නම්, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය ශූන්‍ය වන බව ද, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $g\sin\alpha$ බව ද පෙන්වන්න.

(*b*) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අචල ගෝලයක සුමට බාහිර පෘෂ්ඨයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය $2m$ වූ වෙනත් Q අංශුවක් තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් P සමඟ සරල ලෙස ගැටෙයි. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

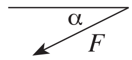
OP අරය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට තවමත් P අංශුව ගෝලය සමඟ ස්පර්ශව ඇතැයි උපකල්පනය කරමින්, P අංශුව මත ගෝලය මගින් ඇති කෙරෙන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{m}{a}\left[\, ga(3\cos\theta - 2) - u^2 \,\right]$ බව පෙන්වන්න.

$u = \sqrt{ga}$ නම්, Q සමඟ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව ගෝලීය පෘෂ්ඨය හැර යන බව ද පෙන්වන්න.

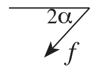
(*a*)



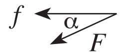
බල සඳහා **10**

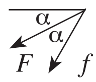
acc (W, E) = 

acc (P, W) = f $\longleftarrow$

acc (Q, W) = 

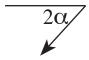
10

acc (P, E) = 

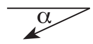
acc (Q, E) = 

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

P සඳහා $\longleftarrow$ $\quad T = m_1(f + F\cos\alpha)$ .... (1) **10**

Q සඳහා 

$\quad m_2g\sin 2\alpha - T = m_2(f + F\cos\alpha)$ .... (2) **10**

පද්ධතිය සඳහා 

$(M + m_1 + m_2)\, g\sin\alpha = MF + m_1(f\cos\alpha + F) + m_2(f\cos\alpha + F)$............. (3) **10**

50

$\boxed{m_1 = m_2}$

(1) + (2) $\longrightarrow$ $m_1 g\sin 2\alpha = m_1 2(f + F\cos\alpha)$

$f + F\cos\alpha = g\sin\alpha\cos\alpha$ .... (4) **5**

(3) $\Rightarrow$ $(M + 2m_1)\, g\sin\alpha = MF + 2m_1(F + f\cos\alpha)$

$= (M + 2m_1)F + 2m_1 f\cos\alpha$ **5**

$g\sin\alpha = F + \dfrac{2m_1}{M + 2m_1} f\cos\alpha$ .... (5) **5**

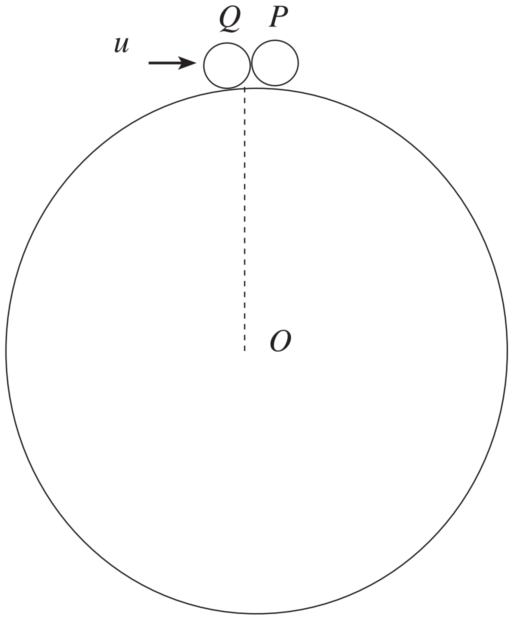
(4) + (5) cosα $\Rightarrow f = \dfrac{2m_1}{M + 2m_1} f\cos^2\alpha$ **5**

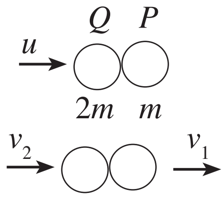
$Mf + 2m_1\sin^2\alpha f = 0 \Rightarrow f = 0$ **5**

ඇත් (5), $\Rightarrow F = g\sin\alpha$

25

(*b*)





$\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v}) \longrightarrow$ අංශු සඳහා

$$0 = 2mv_2 + mv_1 - 2mu \qquad 10$$

$$2v_2 + v_1 = 2u \quad \text{....................} \ (1)$$

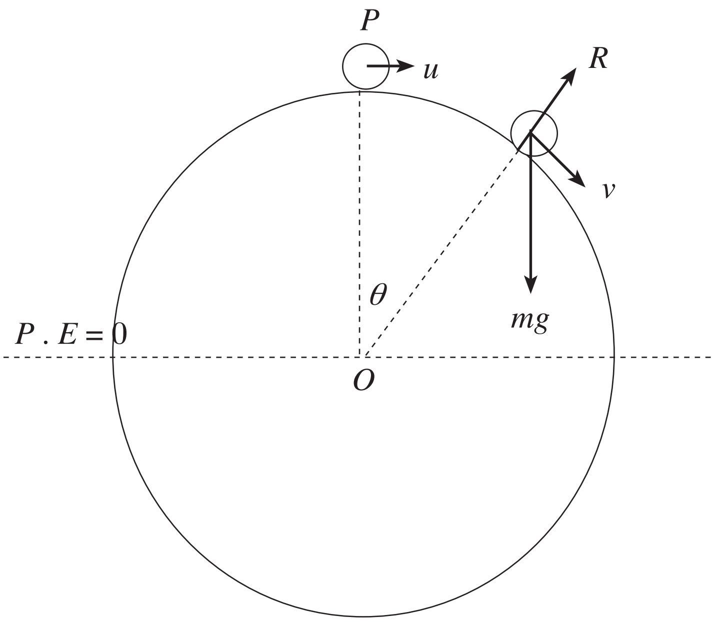
නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2}u \qquad 10$$

$$2v_1 - 2v_2 = u \quad \text{...............} \ (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow v_1 = u \qquad 5$$

25



5

ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 + mga \qquad 15$$

$$V^2 = u^2 + 2ga(1 - \cos\theta)$$

F = m**a** යෙදීමෙන්,

$$R - mg\cos\theta = -\frac{mv^2}{a} \qquad 10$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left[u^2 + 2ga(1-\cos\theta)\right] \qquad 5$$

$$= \frac{m}{a}\left[ga\cos\theta - u^2 - 2ga(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{m}{a}\left[3ga\cos\theta - 2ga - u^2\right] \qquad 5$$

$$= \frac{m}{a}\left[ga\,(3\cos\theta - 2) - u^2\right]$$

$u = \sqrt{ga}$ සහ $\theta = 0 \Rightarrow R = 0$ 5

$\therefore$ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව පෘෂ්ඨය හැර යයි. 5

50

---

13 වන ප්‍රශ්නය

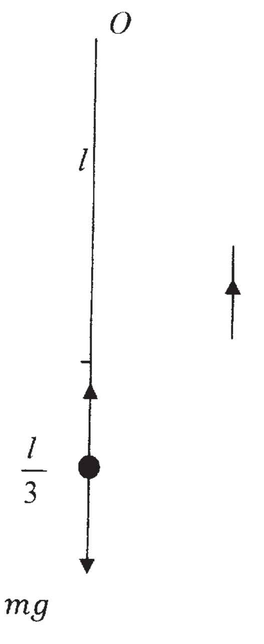
13. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ඇඳා ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. අංශුව සමතුලිතව එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය $\frac{1}{3}$ වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය සොයන්න.

අංශුව, O ට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. O සිට l දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යය වෙත අංශුව ප්‍රථම වතාවට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.
B යනු අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. A සිට B දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා තන්තුවේ විතතිය x යන්න $\ddot{x} + \frac{3g}{l}\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින්, α, β, ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, අංශුව A සිට B දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න.
මුදා හළ මොහොතේ සිට $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$ කාලයකට පසුව අංශුව B වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

අංශුව B හි ඇතිවිට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය λ යැයි ගනිමු.

$$T_0 = \frac{\lambda\left(\frac{l}{3}\right)}{l}$$ 5

$$T_0 = mg$$

$$\frac{\lambda l}{3l} = mg$$

$$\lambda = 3mg$$ 5

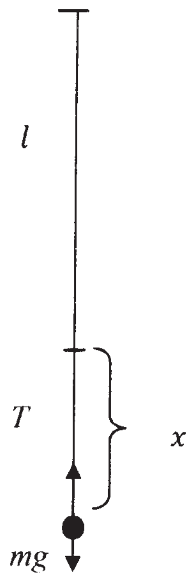
10

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 2g\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$v = \sqrt{gl}$$ 5

05



$$T = \frac{\lambda x}{l} = \frac{3mgx}{l}$$ 5

F $= m$**a** $\downarrow$ $\quad mg - T = m\ddot{x}$ 10

$$mg - \frac{3mgx}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g\left(x - \frac{l}{3}\right)}{l} = 0\ ; \quad x \geq 0$$ 5

20

$x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

$t = 0$ වන විට $x = 0$ වේ. 5

$0 = \frac{l}{3} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-l}{3}$ 5

$\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ 5

$t = 0$ වන විට $\dot{x} = \sqrt{gl}$ වේ.

$\sqrt{gl} = \beta\omega$ 5

$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$ 5

$\frac{-3g\left(x - \frac{l}{3}\right)}{l} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$ 5

$\frac{-3g}{l}(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t) = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$ 5

$\therefore \omega^2 = \frac{3g}{l}$

එබැවින්, $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ 5 සහ $\beta = \sqrt{gl}\sqrt{\frac{l}{3g}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 5

45

දැන් $x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ නිසා

$x - \frac{l}{3} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ 5

සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x - \frac{l}{3} = 0$ මගින් දෙනු ලබයි. 5

$\therefore\ x = \frac{l}{3}$

එබැවින් කේන්ද්‍රය C යන්න A සිට $\frac{l}{3}$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

10

විස්තාරය $= BC$

$t = t_1$ විට $\dot{x} = 0$ බැවින්, $-\alpha\omega\sin\omega t_1 + \beta\omega\cos\omega t_1 = 0$ 5

5

$\Rightarrow \frac{l}{3}\sin\omega t_1 = -\frac{l}{\sqrt{3}}\cos\omega t_1$

$\tan\omega t_1 = -\sqrt{3}$

$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3}$ 5

$t = t_1$ විට x සෙවීම :

$x = \frac{l}{3} - \frac{l}{3}\cos\omega t_1 + \frac{l}{\sqrt{3}}\sin\omega t_1$ 5

$= \frac{l}{3} - \frac{l}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{l}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{l}{3} + \frac{l}{6} + \frac{l}{2}$

$= l$ 5

$\therefore\ BC = l - \frac{l}{3} = \frac{2l}{3}$ 5

30

ප්‍රථම වරට A වෙත ළඟාවීමට ගත් කාලය t_o යැයි ගනිමු.

$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \downarrow$ යෙදීමෙන්,

$u = 0,\ a = g,\ s = \frac{l}{2},\ t = t_o$

$\frac{l}{2} = \frac{1}{2}gt_o^2$ 5

$t_o = \sqrt{\frac{l}{g}}$ 5

B වෙත ළඟාවීමට මුළු කාලය $= \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3\omega}$ 5

$= \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{3g}}$

$= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$ 5

20

අංශුව B හි ඇති විට ආතතිය $= \frac{3mg}{l}(AB)$ 5

$= \frac{3mg}{l}(l)$

$= 3mg$ 5

10

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14.(*a*) *OABC* යනු චතුරස්‍රයක් යැයි ද *D* හා *E* යනු පිළිවෙළින් *OB* හා *AC* විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. තව ද, *DE* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය *F* යැයි ගනිමු. *O* අනුබද්ධයෙන් *A, B* හා *C* ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ යැයි $\mathbf{c}$ ගනිමින්, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ බව පෙන්වන්න.

P හා *Q* යනු පිළිවෙළින් *OA* හා *BC* පැතිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. *P, F* හා *Q* ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව පෙන්වා *PF* : *FQ* අනුපාතය සොයන්න.

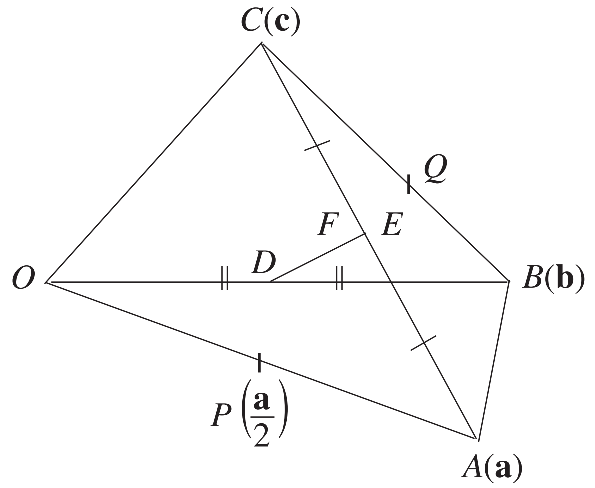
(*b*) *ABCD* යනු, පැත්තක දිග $2l$ හා $BD = 2l$ වූ රොම්බසයක් යැයි ගනිමු. රොම්බසයේ විකර්ණ *O* ලක්ෂ්‍යයෙහිදී හමුවේ. විශාලත්ව නිව්ටන $2P$, $6P$, $4P$, $8P$ හා $6P$ වූ බල පිළිවෙළින් *AB*, *BC*, *DC*, *DA* හා *BD* දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{OD}$ දිශාවලට බල පද්ධතිය විභේදනය කර, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව *BC* ට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියේ *O* වටා ඝූර්ණය සොයන්න.

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට *E* ලක්ෂ්‍යයේදී දික් කරන ලද *AB* හමු වේ නම්, $BE = 2l$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, නිව්ටන αP, βP, γP හා αP විශාලත්ව සහිත අතිරේක බල පිළිවෙළින් *EB*, *CE*, *CA* හා *DC* දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. මුළු පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇත්නම් α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

(*a*)



$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \qquad 5$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \qquad 5$$

$$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$$

$$= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} \qquad 5$$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF}$ (5)

$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}\ (\mathbf{e} - \mathbf{d})$

$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right)$

$= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}$ (5) $\boxed{25}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (5)

$= \mathbf{b} + \frac{1}{2}\ (\mathbf{c} - \mathbf{b})$

$= \frac{1}{2}\ (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (5)

$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF}$

$= -\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}$

$= \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}$ (5)

$\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OQ}$

$= \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4} + \frac{1}{2}\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})$

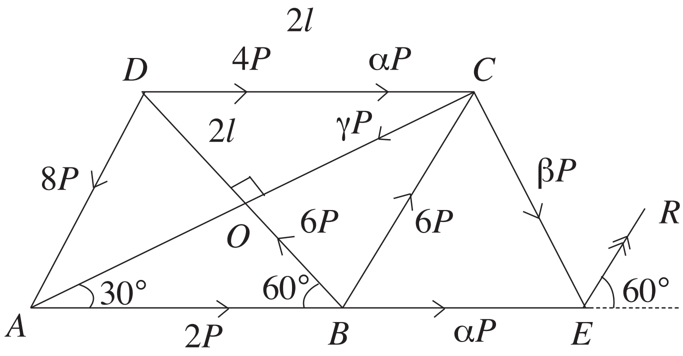
$= \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{4}$ (5)

$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FQ}$ (5)

$\Rightarrow P, F$ හා Q ඒක රේඛීය වේ. (5)

තවද $PF : FQ = 1 : 1$ (5) $\boxed{35}$

(*b*)



5

$\overrightarrow{OC}$: ↗

$X = 2P\cos 30^\circ + 6P\cos 30^\circ + 4P\cos 30^\circ - 8P\cos 30^\circ$ 5

$= 2P.\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 3 + 2 + 4)$

$= 2\sqrt{3}P$ 5

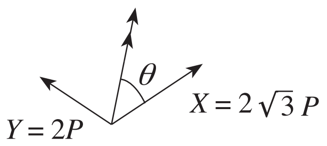
$\overrightarrow{OD}$: ↖

$Y = 6P - 2P\cos 60^\circ + 6P\cos 60^\circ - 4P\cos 60^\circ - 8P\cos 60^\circ$ 5

$= 6P - 2P.\frac{1}{2}(1 - 3 + 2 + 4)$

$= 6P - 4P$

$= 2P$ 5



$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{2P}{2\sqrt{3}P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \theta = 30^\circ$ 5

$\therefore$ සම්ප්‍රයුක්තය *BC* ට සමාන්තර වේ. 5

35

O ↶ සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$M_0 = 2P.l\cos 30^\circ + 6P.l\cos 30^\circ - 4Pl\cos 30^\circ + 8Pl\cos 30^\circ$ 5

$= 2Pl\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 3 - 2 + 4)$

$= 6\sqrt{3}Pl$ 5

10

$R^2 = X^2 + Y^2 = \left(2\sqrt{3}P\right)^2 + (2P)^2$

$= 12P^2 + 4P^2$

$= 16P^2$ 5

$R = 4P$

O සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$6\sqrt{3}Pl = 4P(l\cos 30^\circ + x\cos 30^\circ)$, මෙහි $x = BE$ වේ. 5

$6\sqrt{3}Pl = 4P\dfrac{\sqrt{3}}{2}(l + x)$

$3l = l + x$

$x = 2l$ 5

15

සමතුලිතතාව සඳහා,

$\overrightarrow{OC}$ දිගේ විභේදනයෙන්

$\nearrow$ $2\sqrt{3}P - \gamma P = 0$ 5

$\gamma = 2\sqrt{3}$ 5

$\overrightarrow{OD}$ දිගේ විභේදනයෙන්

$2P - \beta P = 0$ 5

$\beta = 2$ 5

E සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$\alpha P2l\cos 30^\circ - \gamma P2l = 0$ 5

$\alpha\sqrt{3} = \gamma.2$

$\alpha = 2\,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ 5

30

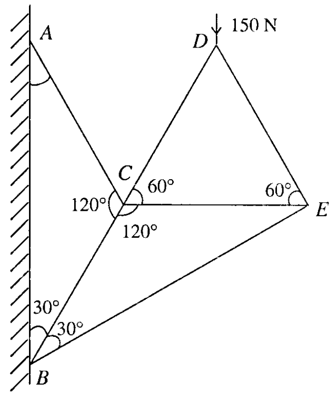
---

15 වන ප්‍රශ්නය

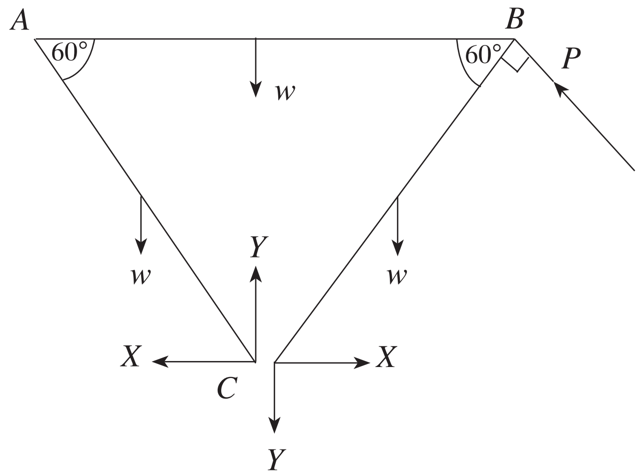
15. (*a*) එක එකක දිග $2a$ හා බර w වූ AB, BC හා CA ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. A ශීර්ෂය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත්තේ ත්‍රිකෝණයට සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකිවන පරිදි ය. ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි BC ට ලම්බව B හිදී යෙදූ P බලයකින් ත්‍රිකෝණය, AB තිරස්ව හා AB ට පහළින් C තිබෙන පරිදි, අල්ලා තබා ඇත. P හි අගය සොයන්න.

C හි දී AC මගින් BC මත යෙදෙන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචකත් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූප සටහනින් අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද සැහැල්ලු දඬු හයකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. එය සිරස් බිත්තියකට A හා B හිදී සුමටව අසව් කර ඇති අතර, D හිදී 150 N භාරයක් දරයි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, **ඒ නයින්,** දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් දක්වමින්, නිර්ණය කරන්න.



(*a*)



පද්ධතියට A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$W(a\cos 60^0 + a + (2a - a\cos 60^0)) = P.\,2a\cos 60^0 \quad (15)$$

$$W\left(\frac{a}{2} + a + 2a - \frac{a}{2}\right) = 2a.\frac{1}{2}P \quad (10)$$

$$P = 3W \quad (5)$$

30

A, $Ya - Xa\sqrt{3} = W.\frac{a}{2}$ (10)

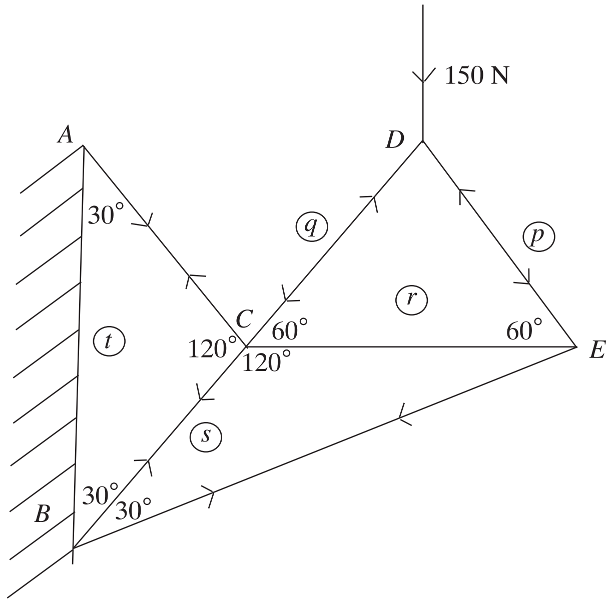
B, $Ya + Xa\sqrt{3} = -W.\frac{a}{2}$ (10)

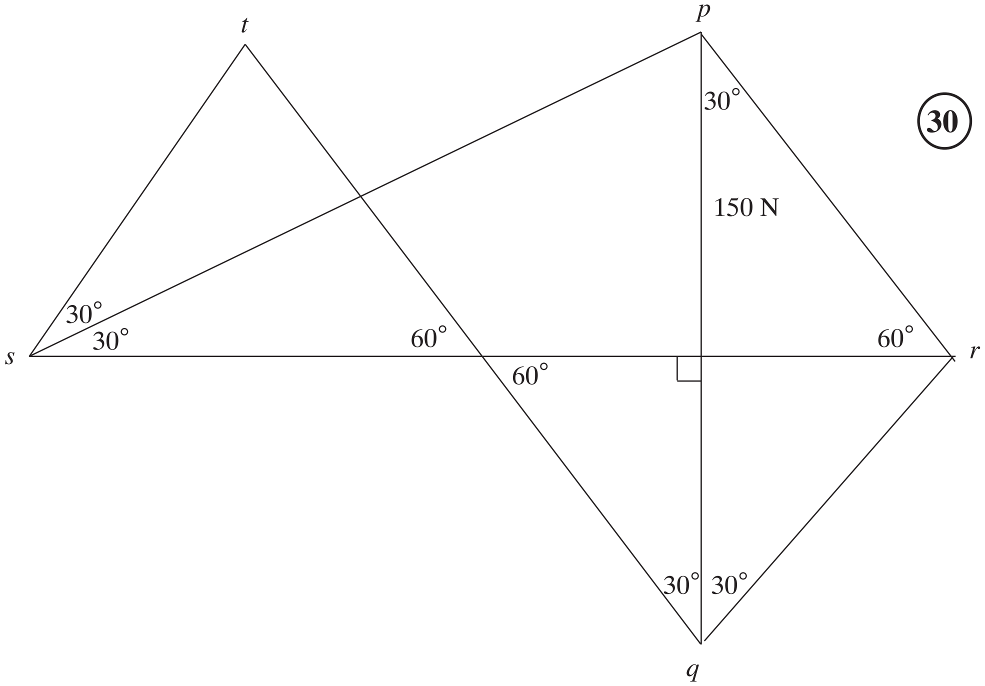
$\Rightarrow\ Y = 0$ (5)

$\therefore X = -\frac{W}{2\sqrt{3}}$ (5)

30

(**b**)





30

30

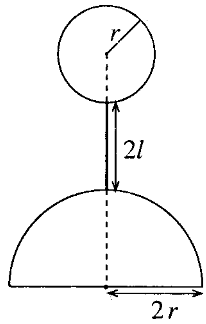
දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතතිය	විශාලත්වය
AC	–	√	$100\sqrt{3}$ N
CD	√	–	$50\sqrt{3}$ N
DE	√	–	$50\sqrt{3}$ N
CE	–	√	$100\sqrt{3}$ N
BC	–	√	$50\sqrt{3}$ N
BE	√	–	$150\sqrt{3}$ N

60

60

16 වන ප්‍රශ්නය

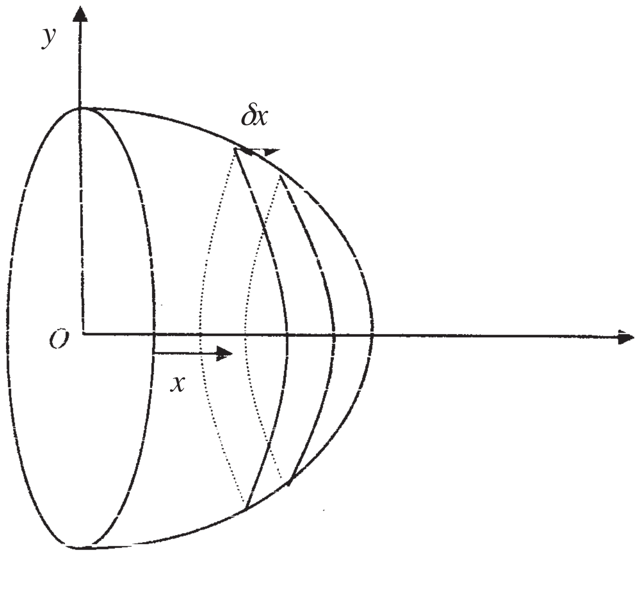
16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



එකම ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සැදි ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන ගෝලයක්, දිග $2l$ සහ ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවරට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අර්ධ ගෝලයේ සමමිති අක්ෂය, දණ්ඩ හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය එකම සරල රේඛාවක් මත පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන්, සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. ගෝලයේ අරය r ද, ස්කන්ධය m ද වන අතර අර්ධ ගෝලයේ අරය $2r$ වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{6}(8r + 3l)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

මෙම සංයුක්ත වස්තුව තිරසට θ කෝණයකින් ආනත අචල තලයක් මත, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකය තලය ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් තලය රළු යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\tan\theta < \frac{12r}{8r + 3l}$ නම්, සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වන්න.

$l = \frac{4r}{3}$ හා $\theta = \frac{\pi}{6}$ නම්, සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වා සංයුක්ත වස්තුව මත ආනත තලය මගින් යෙදෙන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.



සමමිතියෙන්, අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි. **10**

O සිට x දුරින් වූ δx ඝනකමකින් යුත් අංශුමාත්‍රීය තැටිය සලකමු.

O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\overline{X}$ යැයි ගනිමු.

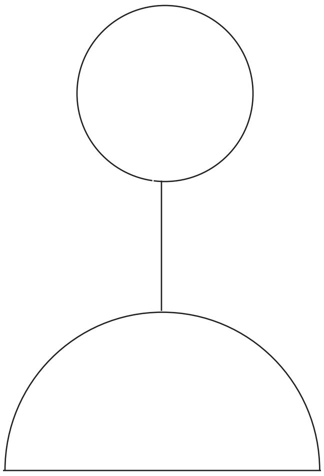
ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ යැයි ගනිමු.

δx ඝනකමකින් යුත් අංශුමාත්‍රීය තැටියේ ස්කන්ධය $\approx \pi(a^2 - x^2)\,\delta x \rho$

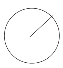
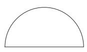
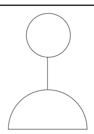
$$\overline{X} = \frac{\int_0^a \pi(a^2-x^2)x\rho\,dx}{\int_0^a \pi(a^2-x^2)\rho\,dx} \;\; (10)\;(10) = \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\frac{2}{3}a^3} \;\; (05)$$

$$= \frac{3}{8}a \quad (05)$$

40



සමමිතියෙන්, සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි. (05)

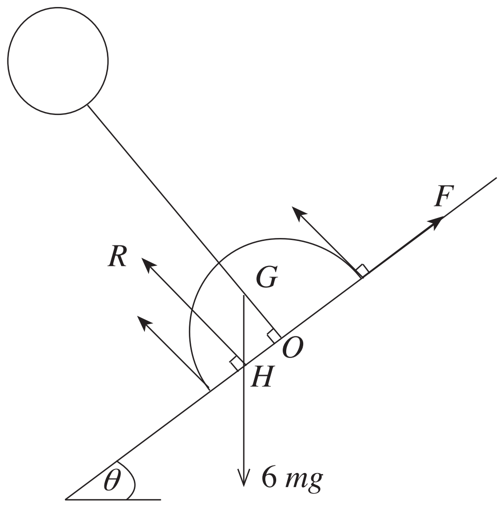
වස්තුව	ස්කන්ධය	කේන්ද්‍රයට O සිට දුර
	$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ (05)	$3r + 2l$ (05)
 $r \rightarrow$	$\frac{2}{3}\pi\ (2r)^3\rho = \frac{2}{3}\pi 8r^3\rho = 4m$ (05)	$\frac{3}{8}(2r) = \frac{3r}{4}$ (05)
	m (05)	$2r + l$ (05)
	$6m$ (05)	$\overline{Y}$

$$6m\overline{Y} = m(3r+2l) + 4m\left(\frac{3r}{4}\right) + m(2r+l) \quad (10)$$

$$6\overline{Y} = 8r + 3l \quad (05)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{6}(8r+3l)$$

55



$OG = \frac{1}{6}(8r + 3l)$

$OH < 2r$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙයි. (10)

එනම් $OG \tan\theta < 2r$ (05)

$\tan\theta < \frac{2r \times 6}{8r+3l} = \frac{12r}{8r+3l}$ (05)

20

$l = \frac{4r}{3},\ \theta = \frac{\pi}{6}$

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (05)

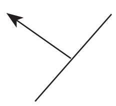
$\frac{12r}{8r+3l} = \frac{12r}{8r+3.\frac{4r}{3}} = \frac{12r}{12r} = 1$ (05)

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ (05)

$\tan\theta < \frac{12r}{8r+3l}$

$\therefore$ සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙයි. (05)

20



විභේදනයෙන්,

$R - 6mg\cos 30^\circ = 0$ (10) $\therefore\ R = 3\sqrt{3}\,mg$ (05)

15

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) පාසලක එක්තරා විභාගයකට පෙනී සිටි සිසුන් 100 දෙනකු පිළිබඳ සමීක්ෂණයකට අනුව, එම සිසුන්ගෙන් 48 දෙනකු විභාගය සමත් වී ඇති බව අනාවරණය විය. තව ද මෙම සිසුන් 100 දෙනා අතුරෙන් 50 දෙනකු පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද 30 දෙනකු පාසලේ දී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද කිසිම සිසුවකු ක්‍රීඩා කටයුතු හා සංගීත කටයුතු යන දෙකට ම සහභාගි වී නොමැති බව ද අනාවරණය විය. තව ද, පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ සිසුන්ගෙන් 60% ක් විභාගය සමත් වී ඇති අතර පාසලේදී ක්‍රීඩා කටයුතු හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නොවූ සිසුන්ගෙන් 30%ක් විභාගය සමත් වී ඇත.

ඉහත සිසුන් 100 දෙනාගෙන් එක් සිසුවකු සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. මෙම සිසුවා

(i) පාසලේදී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු බව දී ඇති විට, ඔහු විභාගය සමත් අයකු වීමේ,

(ii) විභාගය සමත් වූ අයකු බව දී ඇති විට, පාසලේදී ඔහු ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) කුඩා ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයක විෂ්කම්භවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇත.

විෂ්කම්භය (cm)	කුඩා බෝල සංඛ්‍යාව
0.80 – 0.81	1
0.81 – 0.82	3
0.82 – 0.83	9
0.83 – 0.84	20
0.84 – 0.85	14
0.85 – 0.86	2
0.86 – 0.87	1

විෂ්කම්භවල ව්‍යාප්තියේ පළමුවන චතුර්ථකය ගණනය කරන්න.

මෙම ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය 0.835 cm හා 0.01 cm බව දී ඇත. කුඩා ලෝහ බෝල 100 ක තවත් කුලකයක් සඳහා විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය පළමුවන ලෝහ බෝල 50 හි කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය ම බව ද සම්මත අපගමනය 0.015 cm බව ද දී ඇත.

ලෝහ බෝල 150 හි සංයුක්ත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

දෙවන ලෝහ බෝල 100 ක කුලකය සඳහා මිනුම් ගැනීමේදී භාවිත කරනු ලැබූ උපකරණය දෝෂ සහිත බව ද එමගින් එක් එක් බෝලයක විෂ්කම්භය 0.015 cm ප්‍රමාණයකින් අවතක්සේරු වී ඇති බව ද පසුව සොයා ගනු ලැබිණ. මෙම ලෝහ බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(*a*) S, M, N හා X පහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

S : ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වීම

M : සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වීම

N : ක්‍රීඩා හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නොවීම

X : විභාගය සමත් වීම

10

10

එවිට, $\underbrace{P(S) = \frac{50}{100}, P(M) = \frac{30}{100}, P(N) = \frac{20}{100}}_{}$, $P(X) = \frac{48}{100}$ 05

05 $P(X \setminus S) = 0.60, P(X \setminus N) = 0.30$ 05

(i) මුළු සම්භාවිතා ප්‍රමේයයෙන්,

$$P(X) = P(S)\,P(X \setminus S) + P(M)\,P(X \setminus M) + P(N)\,P(X \setminus N)$$ 10

$$\frac{48}{100} = \frac{50}{100} \times 0.6 + \frac{30}{100} \times P(X \setminus M) + \frac{20}{100} \times 0.3$$ 05

$$P(X \setminus M) = \frac{48 - 30 - 6}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$ 10

(ii) බේයි ප්‍රමේයයෙන්, $P(S \setminus X) = \frac{P(S)\,P(X \setminus S)}{P(X)} = \frac{50 \times 0.6}{48} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$

05

10

75

(*b*) පළමුවන චතුර්ථකය $= \frac{50}{4}$ වන නිරීක්ෂණයේ අගය $= 12.5$ වන නිරීක්ෂණයේ අගය

$\therefore$ පළමුවන චතුර්ථකය පිහිටන පන්ති ප්‍රාන්තරය $(0.82 - 0.83)$ 10

$\therefore$ පළමුවන චතුර්ථකය $= 0.82 + \frac{(12.5 - 4)}{9} \times 0.01$ 10

$= 0.82 + 0.009$

$= 0.829$ 05

25

බෝල 50 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$

බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$ 10

$\therefore$ බෝල 150 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$

$\boxed{10}$

බෝල 50 හි විෂ්කම්භවල විචලතාව, $S_1^2 = 0.01^2 = 0.0001$

බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල විචලතාව, $S_2^2 = 0.015^2 = 0.000225$

බෝල 150 හි විෂ්කම්භවල සංයුක්ත කුලකයේ විචලතාව,

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}$$ 10

$$= \frac{50 \times 0.0001 + 100 \times 0.000225}{150}$$

$$= \frac{0.0050 + 0.0225}{150}$$ 05

$$= 0.00018$$

$\boxed{15}$

---

y යනු බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල නිවැරදි අගය යැයි ගනිමු.

එවිට, $y = x + 0.015$; මෙහි x මුල් අගය වේ. 05

05 $\therefore \bar{y} = \bar{x} + 0.015$ හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය = මුල් සම්මත අපගමනය 05

$\therefore$ සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය $= 0.835 + 0.015 = 0.85$ හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය $= 0.015$ 05

05

$\boxed{25}$
