2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r-1) = n^2(n+1)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව. පැ. $= \sum_{r=1}^{1} r(3r-1) = 2$ හා

ද. පැ. $= 1^2(1+1) = 2$.

එනයින් $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^{k} r(3r-1) = k^2(k+1)$ වේ. 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} r(3r-1) = \sum_{r=1}^{k} r(3r-1) + (k+1)[3(k+1)-1]$ 5

$= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$ (අභ්‍යුහනය කල්පිතයෙන්)

$= (k+1)[k^2+3k+2]$

$= (k+1)^2(k+2)$ 5

$= (k+1)^2[(k+1)+1]$.

එනයින් $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=k+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

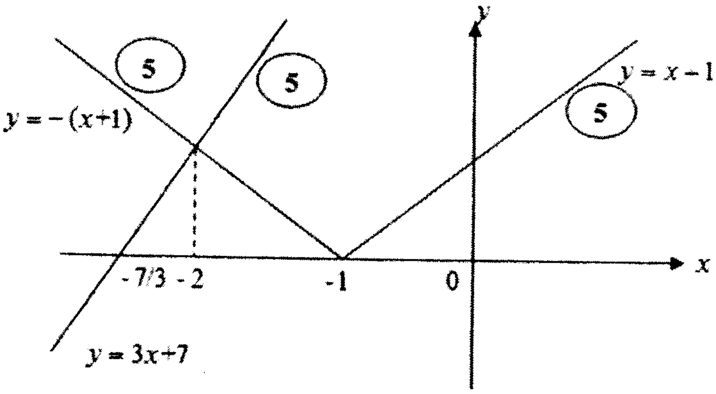
එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ම සත්‍ය වේ.

5 $\boxed{25}$

2 වන ප්‍රශ්නය

2. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x+1|>3x+7$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(I ක්‍රමය)



ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේදී, $-x-1=3x+7$ විය යුතු බැවින් එහිදී $x=-2$ විය යුතුය. 5

එබැවින් විසඳුම් කුලකය = $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$ 5

$\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

<u>(i) අවස්ථාව</u> $\boxed{x\le -1}$ මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow -(x+1)>3x+7$ 5 $\Leftrightarrow x<-2.$ 5

එබැවින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $x<-2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

<u>(ii) අවස්ථාව</u> $\boxed{x>-1}$ මෙම අවස්ථාවේ දී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow x+1>3x+7$ 5

$\Leftrightarrow \quad x<-3$ 5

මෙම විසංවාදයෙන්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින් විසඳුම් කුලකය= $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$. 5 $\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

(i) <u>අවස්ථාව</u> $\boxed{x\le -\frac{7}{3}}$

මෙම අවස්ථාවේදී $3x+7\le 0$ බැවින් $|x+1|>3x+7$ යන්න $x\le -\frac{7}{3}$ තෘප්ත කරන සියලු x අගයන් ගෙන් තෘප්ත වේ. 5

(ii) <u>අවස්ථාව</u> $\boxed{x>-\frac{7}{3}}$

මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow (x+1)^2>(3x+7)^2$ 5

$\Leftrightarrow 8x^2+40x+48<0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)<0 \Leftrightarrow -3<x<-2$ 5

මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $-\frac{7}{3}<x<-2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. 5

$\boxed{25}$

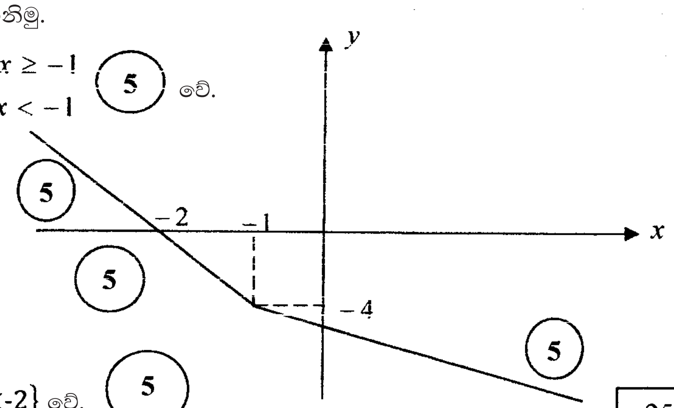
අගයන් දෙකම සැලකීමෙන්, විසඳුම් කුලකය= $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$. 5

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x+1| > 3x+7$ අසමානතාව $|x+1| - (3x+7) > 0$ යන්නට තුල්‍ය වේ.

$y = |x+1| - (3x+7)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $y = \begin{cases} -2x-6 & , x \geq -1 \\ -4x-8 & , x < -1 \end{cases}$ 5 වේ.



විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ වේ. 5

25

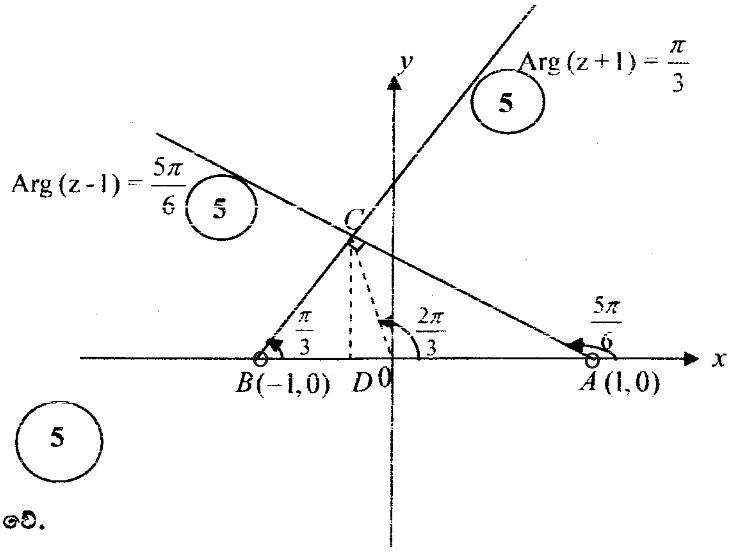
3 වන ප්‍රශ්නය

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $\text{Arg}(z+1)=\dfrac{\pi}{3}$,

(ii) $\text{Arg}(z-1)=\dfrac{5\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ **ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.**



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව Z_C යැයි ගනිමු.

$A\hat{C}B=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ වේ. 5

$AB=2$ බැවින්, එවිට $BC=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$ වේ.

දැන් $CD=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ හා $BD=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ වේ. 5 හෝ $\left[\; z+1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\;\right]$

$\therefore z_c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 5

$A\hat{C}B=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ **වේ. එබැවින්, කේන්ද්‍රය O ද අරය 1 ක්ද වූ වෘත්තය මත C පිහිටයි.**

$\therefore A\hat{O}C=\dfrac{2\pi}{3}$ හා එනයින් $z_c=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ වේ.

5 5

15

වෙනත් ක්‍රමයක්

AC හා BC හි සමීකරණ පිලිවෙලින් $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ හා $y=\sqrt{3}(x+1)$ වේ. 5

ඒවා විසඳීමෙන්, $x=-\dfrac{1}{2}$ හා $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ලැබේ. 5

$\therefore z_c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 5

15

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\left(2+\frac{3}{x}\right)(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^{n-2} හි සංගුණකය 120 වේ. n හි අගය සොයන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන් $\left(2+\dfrac{3}{x}\right)(1+x)^n = \left(2+\dfrac{3}{x}\right)\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$ 5

x^{n-2} හි සංගුණකය 120 බව දී ඇති බැවින්,

5 $2\,{}^nC_{n-2} + 3\,{}^nC_{n-1} = 120$ විය යුතුය.

5

එනම් $2\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!} + 3\dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = 120$.

$\Leftrightarrow n(n-1) + 3n = 120$

5 5

$\Leftrightarrow n^2 + 2n - 120 = 0 \Leftrightarrow (n+12)(n-10) = 0 \Leftrightarrow n = 10 \quad (\because n \in \mathbb{Z}^+)$ 25

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)} = -8$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)} \times \frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x \left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\cos^2 2x \, (-x^2)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \left(\frac{-4}{\cos^2 2x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right) \quad 5$$

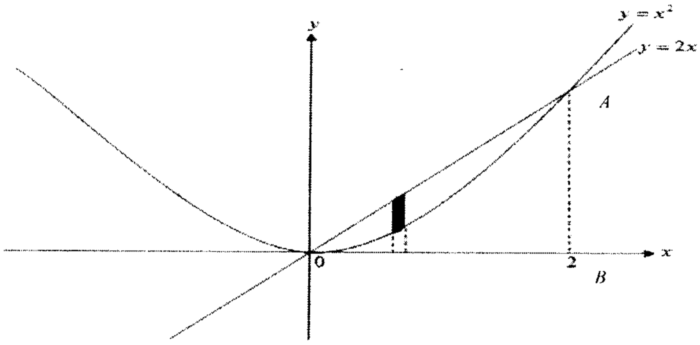
$$= 1^2 \times \left(\frac{-4}{1}\right) \times 2 \quad = -8$$

5 5

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x = 0$ හෝ $x = 2$ වේ. 5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_0^2 (2x - x^2)dx$ 10

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$ 5

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ **වර්ග ඒකක.** 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් **ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x = 0$ හෝ $x = 2$ වේ.** 5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $=$ ΔOAB **වර්ගඵලය** $- \int_0^2 x^2 dx$ 10

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$ 5

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ **වර්ග ඒකක.** 5

25

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු; මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයා, $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$$\left.\begin{aligned} x = e^t + e^{-t} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} \end{aligned}\right\} \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad 5$$

5

C යනු $t = \ln 2$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. එවිට $C \equiv \left(2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}\right)$ **වේ.**

එනම් $C \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **වේ.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$ 5

අවශ්‍ය සමීකරණය $y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ **වේ.** 5 **එනම්** $5x - 3y - 8 = 0$ **වේ.** 25

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $\lambda \neq \pm 1$ යැයි ගනිමු. ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා $(1+\lambda)x - 2(1-\lambda)y - 2(1-\lambda) = 0$ සරල රේඛාව මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 4 ක් වේ. λ හි අගයන් සොයන්න.

AB රේඛාවේ සමීකරණය $(1+\lambda)x - 2(1-\lambda)y - 2(1-\lambda) = 0$ **වේ.**

එයින් $y = 0$ **විට** $x = \dfrac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda)}$ **හා** $x = 0$ **විට** $y = -1$ **වේ.**

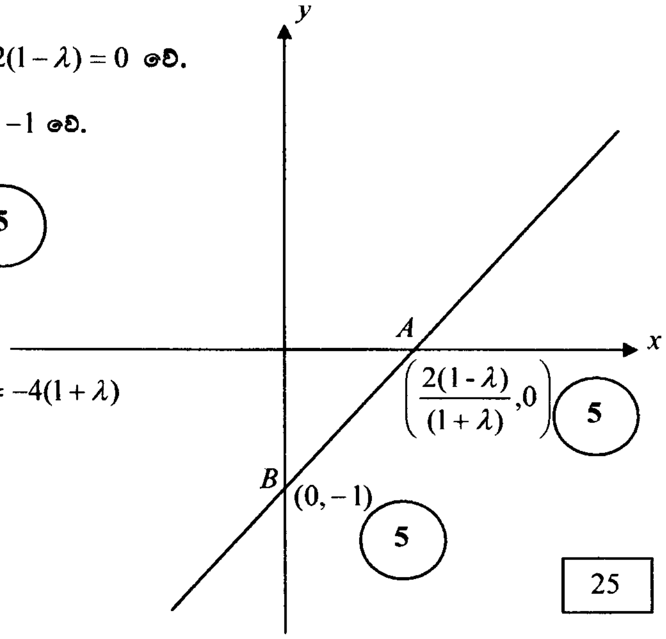
$\therefore$ **ΔOAB හි වර්ගඵලය** $= \dfrac{1}{2} \times 1 \times \left|\dfrac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}\right| = 4$ 5

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(1-\lambda)}{1+\lambda}\right| = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)} = \pm 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = 4(1+\lambda)$ **හෝ** $1-\lambda = -4(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{3}{5}$ **හෝ** $\lambda = -\dfrac{5}{3}$.

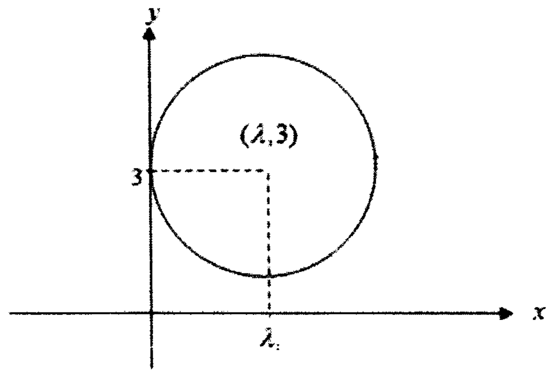
5 5



25

9 වන ප්‍රශ්නය

9. (0, 3) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී y – අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.



අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-\lambda)^2 + (y-3)^2 = \lambda^2$ **ලෙස ලිවිය හැකිය.** | **කේන්ද්‍රය** 5

එනම් $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 6y + 9 = 0.$ | **සමීකරණය** 5

මෙය $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ **වෘත්තයට ප්‍රලම්බ බැවින්,**

$2(-4)(-\lambda) + 2(2)(-3) = -5 + 9$ **වේ.** 5

$\Leftrightarrow 8\lambda - 12 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$ 5

එනයින් අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ **වේ.** 5

$\boxed{25}$

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\tan\alpha = -1$ හා $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ වේ. $\cos(\alpha+\beta)$ හි අගය සොයන්න.

5

$\tan\alpha = -1$ **හා** $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **හා** $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **හා** $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 10

දැන්, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 5

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \quad = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$ 5

25

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න.

$f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k යනු නියතයකි.

ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන්, $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*b*) $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍යය, $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල γ හා δ යැයි ද $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන බව දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

(*a*) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$

$(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින්, සාධක ප්‍රමේයයෙන්, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$ 10

දැන්, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{27} + 5 \times \frac{1}{9} + a \times \frac{1}{3} - 1$ **බැවින්** 10

$1 + 5 + 3a - 9 = 0$

$\therefore\ a = 1.$ 5

$\boxed{25}$

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1 = (3x-1)(x^2 + 2x + 1)$ 10

$= (3x-1)(x+1)^2$ 5

මෙය $k = 1$ **සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ.** 5

$\boxed{20}$

$3x - 1 = 3(x+1) - 4$ 5

මෙය, $b = 3$ **හා** $c = -4$ **සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ.**

$\therefore\quad f(x) = [3(x+1) - 4](x+1)^2 = 3(x+1)^3 - 4(x+1)^2$ 5

$\therefore$ **අවශ්‍ය ශේෂය** $= -4(x+1)^2.$ 5

$\boxed{15}$

(*b*) **ශූන්‍යය** $ax^2 + bx + c = 0$ **හි සාධකයක් ලෙස ගනිමු.**

එවිට, $x = 0$ **ආදේශයෙන්,** $c = 0$ **ලැබේ.** 5

$ac \neq 0$ **බැවින්, මෙය විසංවාදයකි.**

$\therefore$ **ශූන්‍යය** $ax^2 + bx + c = 0$ **හි මූලයක් නොවේ.** 5

$\boxed{10}$

එබැවින්, $\alpha \neq 0$ හා $\beta \neq 0$.

තවද, $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ හා $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$. 10

10

දැන්, $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$,

$$ac(\lambda+1)^2 = ac\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2 = \frac{ac}{\beta^2}(\alpha+\beta)^2 = \frac{ac}{\beta^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} = b^2\frac{c}{a\beta^2} = b^2\frac{\alpha\beta}{\beta^2} = b^2\frac{\alpha}{\beta} = b^2\lambda$$

5 5 5 5 5

නැත්නම්,

$$\left[\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{ac} \quad \therefore ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda\right]$$

5 5 5 5 5

$\boxed{45}$

ඉහත පරිදිම, $\gamma \neq 0$ හා $\delta \neq 0$, ද $pr(\mu+1)^2 = \mu q^2$ වේ. 5

$\therefore \dfrac{ac(\lambda+1)^2}{pr(\mu+1)^2} = \dfrac{b^2\lambda}{q^2\mu}$ බැවින්, $acq^2\mu(\lambda+1)^2 = prb^2\lambda(\mu+1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ acq^2 = prb^2 \ &\Leftrightarrow \mu(\lambda+1)^2 = \lambda(\mu+1)^2 \quad 10\\ &\Leftrightarrow \lambda^2\mu + 2\lambda\mu + \mu = \lambda\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda\\ &\Leftrightarrow \lambda\mu(\lambda-\mu) - (\lambda-\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda-\mu)(\lambda\mu-1) = 0 \quad 5\\ &\Leftrightarrow \lambda = \mu \ or\ \lambda = \frac{1}{\mu}. \quad 5\end{aligned}$$

$\boxed{25}$

මූල එකම අනුපාතයට වන්නේ, $\Leftrightarrow \lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$.

$\therefore acq^2 = prb^2$ විය යුතුය.

$\therefore acq^2 = prb^2$

5

එනම $2k(6k)^2 = 8\times 9$ බැවින් $k^3 = 1$ විය යුතුය.

$\therefore k = 1$ 5

$\boxed{10}$

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගි වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයකුගෙන් හා හොකී ක්‍රීඩකයකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන්දෙනකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(ii) පාසල් හය ම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$n = 0, 1, 2, 3$ සඳහා r^n හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) - Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = -\frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න.

(a) (i) **අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^6C_2 \times {}^6C_2 = (15)^3 = 3375.$ 5 10 5 $\boxed{20}$

(ii) **අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 90$ 10 5 $\boxed{15}$

(iii) **පාසැල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2$ 10

ඉතිරි පාසැල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක් ක්‍රීඩකයෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන

$= {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$ 10

අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 7290$ 5

5 $\boxed{30}$

(b) $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$

$r^2 - r - 5 = A(r^2 - 1)(r+5) - Br^2(r+4)$

$\quad = (A-B)r^3 + (5A - 4B)r^2 - Ar - 5A$ 5

දෙපැත්තේ සංගුණක සංසන්දනය කරමු.

r^3 : $0 = A - B$ ……………………………(i)

r^2 : $1 = 5A - 4B$ ……………………………(ii)

r^1 : $-1 = -A$ ……………………………(iii) 10

r^0 : $-5 = -5A$ ……………………………(iv)

දැන් (i) හා (iii) $\Rightarrow A = 1$ හා $B = 1$.

මෙම අගයන්ගෙන් (ii) හා (iv) ද තෘප්ත වේ. 5

එමනිසා දී ඇති අවශ්‍යතාව තෘප්ත කරන පරිදි A හා B නියත පවතී. ඒවායේ අගයන් $A = 1$ හා $B = 1$. 5

$\boxed{25}$

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)} = \frac{(r^2-1)(r+5) - r^2(r+4)}{r(r+1)(r+4)(r+5)} \quad 5$$

දැන්, $U_r = \dfrac{r-1}{r(r+4)} - \dfrac{r}{(r+1)(r+5)}$ 5

$= f(r) - f(r+1),$ 5

මෙහි $f(r) = \dfrac{r-1}{r(r+4)}$ 5

$\boxed{20}$

එවිට,

$r = 1$: $U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$ 5

$r = 2$: $U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$\vdots$

$r = n-1$: $U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r = n$: $U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$ 5

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad 5 \quad = -\frac{n}{(n+1)(n+5)} \quad 5$$

$\boxed{20}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{(n+1)(n+5)} = 0$ බැවින් $\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ. 5

එහි එකතුව 0 වේ. 5

$\boxed{10}$

$$\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r = 3\left\{\sum_{r=1}^{\infty} U_r - U_1 - U_2\right\} \quad 5$$

$$= 3\{0 - f(1) + f(3)\} = 3 \times \frac{2}{3 \times 7} = \frac{2}{7} \quad 5$$

$\boxed{10}$

13 වන ප්‍රශ්නය

13.(*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න; මෙහි $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{A}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{CX} = \lambda\mathbf{BX}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{B}$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1-z|^2 = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1-\operatorname{Re} z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු, $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ හා $-\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **බැවින්** $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 5 **වන අතර එනයින්,** $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ 10

දැන්, $A^T A = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2 = b$ **හා** $a^2 + 1 = 1$ 10

$\Leftrightarrow 2 = b$ **හා** $a = 0$ 5

$\boxed{30}$

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **හා** $X = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ **බැවින්**

$CX = \begin{pmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{pmatrix}$ 5 **හා** $BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{pmatrix}$ 5

එනයින් , $CX = \lambda BX \Leftrightarrow 12u + 5 = \lambda(3u+1)$ **හා** $8u + 3 = \lambda(2u+1)$

$\therefore \dfrac{12u+5}{8u+3} = \dfrac{\lambda(3u+1)}{\lambda(2u+1)}$. 5 5

එම නිසා $24u^2 + 22u + 5 = 24u^2 + 17u + 3 \Rightarrow 5u = -2$

$u = -\dfrac{2}{5}$ 5

එවිට, $-\dfrac{16}{5} + 3 = \lambda\left(-\dfrac{4}{5} + 1\right)$ $\therefore \lambda = -1$ 5

$\boxed{30}$

5

දැන්, $C-\lambda B=\begin{pmatrix}7&5\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6\\6&4\end{pmatrix}$ 5

$\begin{vmatrix}9&6\\6&4\end{vmatrix}=0$ **බැවින් $C-\lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී.** 5 $\boxed{15}$

වෙනත් ක්‍රමයක් දැන්, $C-\lambda B=\begin{pmatrix}7&5\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6\\6&4\end{pmatrix}$ 5

$\begin{pmatrix}9&6\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ **ලෙස ගනිමු.** 5

$\Leftrightarrow 9p+6r=1$ .... (i)

$9q+6s=0$ .... (ii)

$6p+4r=0$ .... (iii)

$6q+4s=1$ .... (iv)

$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\times\dfrac{2}{3}\Rightarrow 6p+4r=\dfrac{2}{3}\\ \text{(iii)}\Rightarrow 6p+4r=0\end{array}\right\}$ **මෙය විසංවාදයකි.** 5

එමනිසා $C-\lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී. $\boxed{15}$

(b) (i) $|1-z|^2=(1-z)\overline{(1-z)}$ 5

$=(1-z)\ (1-\bar{z})$ 5

$=1-(z+\bar{z})+z\bar{z} \quad =1-2\operatorname{Re}z+|z|^2$ 5 $\boxed{15}$

(ii) $|z|\neq 1$, **සඳහා** $\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{(1-z)}\times\dfrac{\overline{(1-z)}}{\overline{(1-z)}}=\dfrac{1-\bar{z}}{|1-z|^2}$ 5

5

$\therefore \operatorname{Re}\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1-\operatorname{Re}\bar{z}}{|1-z|^2}=\dfrac{1-\operatorname{Re}z}{|1-z|^2}$ 5

5 $\boxed{20}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$z=x+iy$ **ලෙස ගනිමු. මෙහි $x,\ y\in\Re$ වේ.**

(i) එවිට $1-z=1-x-iy$ 5

5

$\therefore\ |1-z|^2=(1-x)^2+y^2 \quad =1-2x+x^2+y^2 \quad =1-2\operatorname{Re}z+|z|^2$ 5 $\boxed{15}$

(ii) $z\neq 1$, **සඳහා** $\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{1-x-iy}\times\dfrac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy}=\dfrac{(1-x)+iy}{(1-x)^2+y^2}$ 5

5

$\therefore \operatorname{Re}\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}=\dfrac{1-\operatorname{Re}z}{|1-z|^2}$ 5

5 $\boxed{20}$

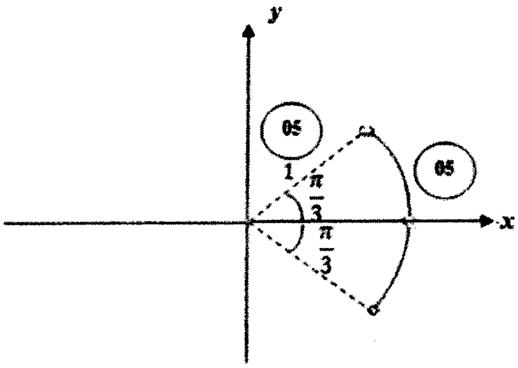
$z \neq 1$ සඳහා, $\quad \operatorname{Re}\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-\operatorname{Re} z}{|1-z|^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(1-\operatorname{Re} z) = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ 5

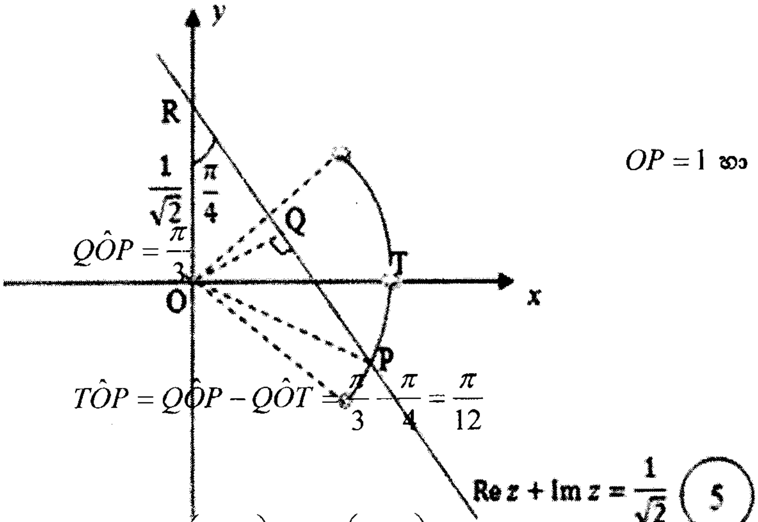
$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$ 5

10



10



$OP = 1$ හා $OQ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$, නිසා 5

$T\hat{O}P = Q\hat{O}P - Q\hat{O}T = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ 5

$\therefore z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$ 5

20

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$z \in S \Rightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta\,; \; -\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ 5

$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2\theta = -\dfrac{1}{2}$ 5

$-\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$; බැවින් $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ 5 $\qquad \therefore z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$ 5

20

14 වන ප්‍රශ්නය

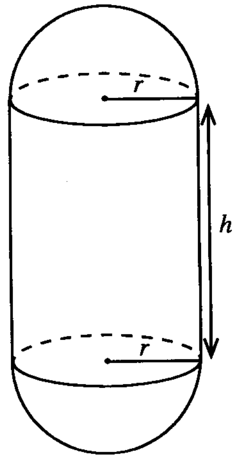
14. (*a*) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් **ගණන** සොයන්න.

(*b*) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක්, එම අරය ම සහිත උස මීටර h වූ සෘජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව 36π m^3 වේ. $h = \dfrac{108 - 4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.



ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨ සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් C යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left(4r^2 + \dfrac{27}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(*a*) $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$; $x \neq -1$ **ලෙසගනිමු.**

$x \neq -1$, **සඳහා**

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^2+3).8 - 8x\left[(x^2+3)+(x+1).2x\right]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad 15$$

$$= \frac{8(x^2+3) - 16x^2(x+1)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8\left[3 - x^2 - 2x^3\right]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad 10$$

$$= \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$\boxed{25}$

---

5 5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\because 2x^2 + 3x + 3 \neq 0)$

සියලු x සඳහා $2x^2+3x+3>0$ බැවින් සියලු $x \neq 1$ සඳහා $\dfrac{8(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2} > 0$ වේ.

එබැවින් $x = \pm 1$ සඳහා $f'(x)$ හි ලකුණ $(1-x)$ හි ලකුණම වේ.

	$x=1$	$x=-1$	
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.
	5	5	5

$x=1$ හිදී $f'(x)$ අර්ථ නොදැක්වේ. 5

එනයින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට ඇත්තේ එකම හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් පමණි ; එය සාපේක්ෂ උපරිමයක් වන අතර එහි ඛණ්ඩාංක (1, 1) වේ. 5

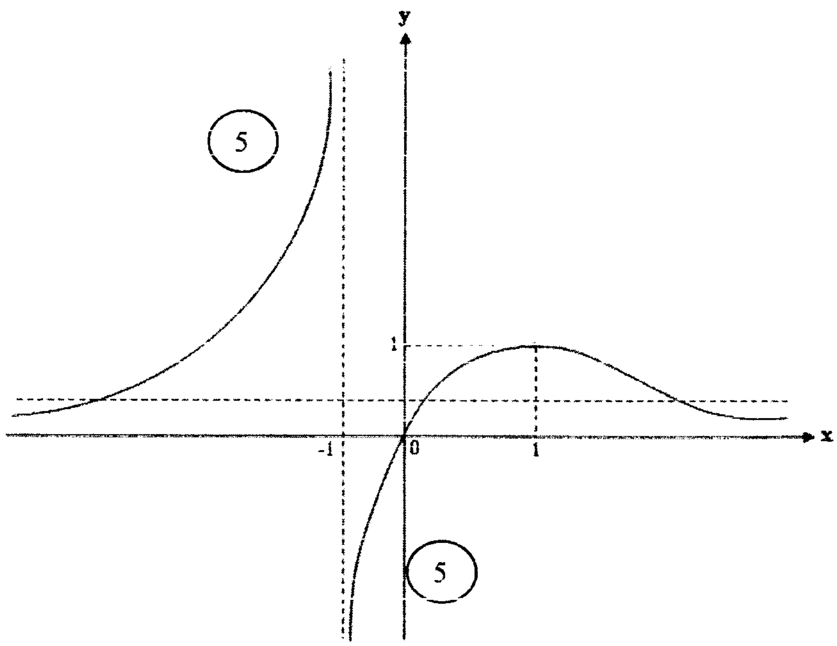
සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $f(x)$ අර්ථ නොදක්වෙන්නේ $x=-1$ දී පමණි.

තවද , $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ හා $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ වේ.

එබැවින් $x=-1$. එකම සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. 5

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ වේ.

$\therefore y=0$ එකම තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. 5



55

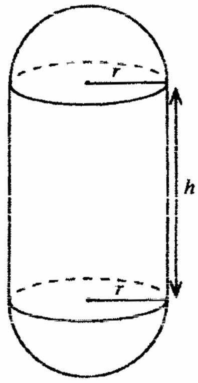
$$(x+1)(x^3+3)=16x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{8x}{(x+1)(x^3+3)}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \quad 5$$

අවශ්‍ය විසඳුම් සංඛ්‍යාව $y=f(x)$ හා $y=\frac{1}{2}$ ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ.

ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් මගින් මෙම සංඛ්‍යාව 3 කි. 5

10



(b) සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$ 10

$\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h=36\pi$ බව දී ඇත. 5

$$\Rightarrow 4r^3+3r^2h=108 \quad 5$$

$$\rightarrow h=\frac{108-4r^3}{3r^2}$$

20

දැන්, $h>0 \Rightarrow r<3$. එබැවින් $0<r<3$ විය යුතුය. 5

ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම

$$C=300\times 2\pi rh+1000\times 4\pi r^2 \quad 5$$

$$=200\pi\left\{3r\left(\frac{108-4r^3}{3r^2}\right)+20r^2\right\} \quad 5$$

$$=800\pi\left\{4r^2+\frac{27}{r}\right\};\ 0<r<3.$$

15

$$\frac{dC}{dr}=800\pi\left\{8r-\frac{27}{r^2}\right\}. \quad 5$$

5

$$\therefore \frac{dC}{dr}=0 \Leftrightarrow 8r=\frac{27}{r^2} \Leftrightarrow r=\frac{3}{2} \quad 5$$

$0<r<\frac{3}{2}$ සඳහා $\frac{dC}{dr}<0$ හා

$\frac{3}{2}<r<3$ සඳහා $\frac{dC}{dr}>0$ 5

එනයින් $r=\frac{3}{2}$ වන විට C අවම වේ. 5

25

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන් $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx = -\frac{1}{2}(e^\pi+1)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,dx$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $I = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$

$= \int \frac{3(x+1)-1}{x^2+2x+5}dx$ 05

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$ 05

$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$, **මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.**

05 05 05

$\boxed{25}$

[$x^2+2x+5>0$ **බව හඳුනා ගන්න.**]

(*b*) $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$

$= \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\frac{dx}{dx}dx$ 05

05 05

$= x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

05

$= e^\pi\cos(\ln e^\pi) - \cos(\ln 1) + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\frac{dx}{dx}dx$ 05

05 05

$= e^\pi\cos\pi - \cos 0 - x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$ 05

$= -e^\pi - e^\pi\sin\pi - \sin(\ln 1) - I$ 05

$2I = -e^\pi - 1$

$\therefore I = -\frac{1}{2}(e^\pi+1)$ 05

$\boxed{50}$

(c) $u = a - x$ යැයි ගනිමු. එවිට $x = a - u$ හා $\dfrac{dx}{du} = -1 \Rightarrow dx = -du$ වේ. $x = a$ විට 05

$u = 0$ ද $x = 0$ විට $u = a$ ද වේ.

$$\int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(a-u)(-du) = \int_0^a f(a-u)du = \int_0^a f(a-x)dx$$ 05

05

$\boxed{15}$

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{p\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$ (ඉහත ප්‍රතිඵලයෙන්)

05

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}dx$$

05

10

$$\because p\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left(\frac{\pi}{2}-x-\pi\right)\left(2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\pi\right) = -\frac{1}{2}(2x+\pi)2(\pi-x) = (x-\pi)(2x+\pi) = p(x)$$ $\boxed{20}$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}dx$$ 05

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{p(x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{p(x)}dx$$ 05

$\boxed{10}$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x-\pi)(2x+\pi)}dx$$

(සටහන: 10 භින්න භාග වෙනුවෙන්)

05 05

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{1/3\pi}{(x-\pi)} - \frac{2/3\pi}{(2x+\pi)}\right\}dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3\pi}\ln|x-\pi| - \frac{2}{3\pi}\times\frac{1}{2}\ln|2x+\pi|\right\}\Bigg|_0^{\pi/2}$$ 05

$$= \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\left|-\frac{\pi}{2}\right| - \ln|-\pi| - \ln|2\pi| + \ln|\pi|\right\}$$ 05

$$I = \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\frac{\pi}{2} - \ln 2\pi\right\}$$ 05

$$= \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$ 05

$\boxed{30}$

16 වන ප්‍රශ්නය

16. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x+y=5$ හා $x+2y=4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A යැයි ද $R=\{(x,y): x+2y\le 4$ හා $2x+y\ge 5\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy- තලයෙහි අඳුරු කරන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-14x+8y+60=0$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ජ්‍යාය සඳහා සුපුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $x-y=10$ බව පෙන්වන්න.

A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමග S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

m_1 හා m_2 යනු පිළිවෙළින් l_1 හා l_2 හි බෑවුම් යැයි ගනිමු. එවිට $m_1=-2$ හා $m_2=-\frac{1}{2}$ වේ.

05 05

l_1 හා l_2 අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ 05

05

$$=\left|\frac{-2+\frac{1}{2}}{1+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right|=\frac{3}{4}$$

20

$$\therefore \theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

කෝණ සමච්ඡේදක

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{5}}$$ 10

i.e. $2x+y-5=\pm(x+2y-4)$ 05

$-x+y+1=0$ or $3x+3y-9=0$

$x-y-1=0$ or $x+y-3=0$

05 05

l_1 හා $x-y-1=0$ අතර සුළු කෝණය α යැයි ගනිමු.

එවිට, $\tan\alpha=\left|\frac{-2-1}{1+(-2)(1)}\right|=3>1$ 05

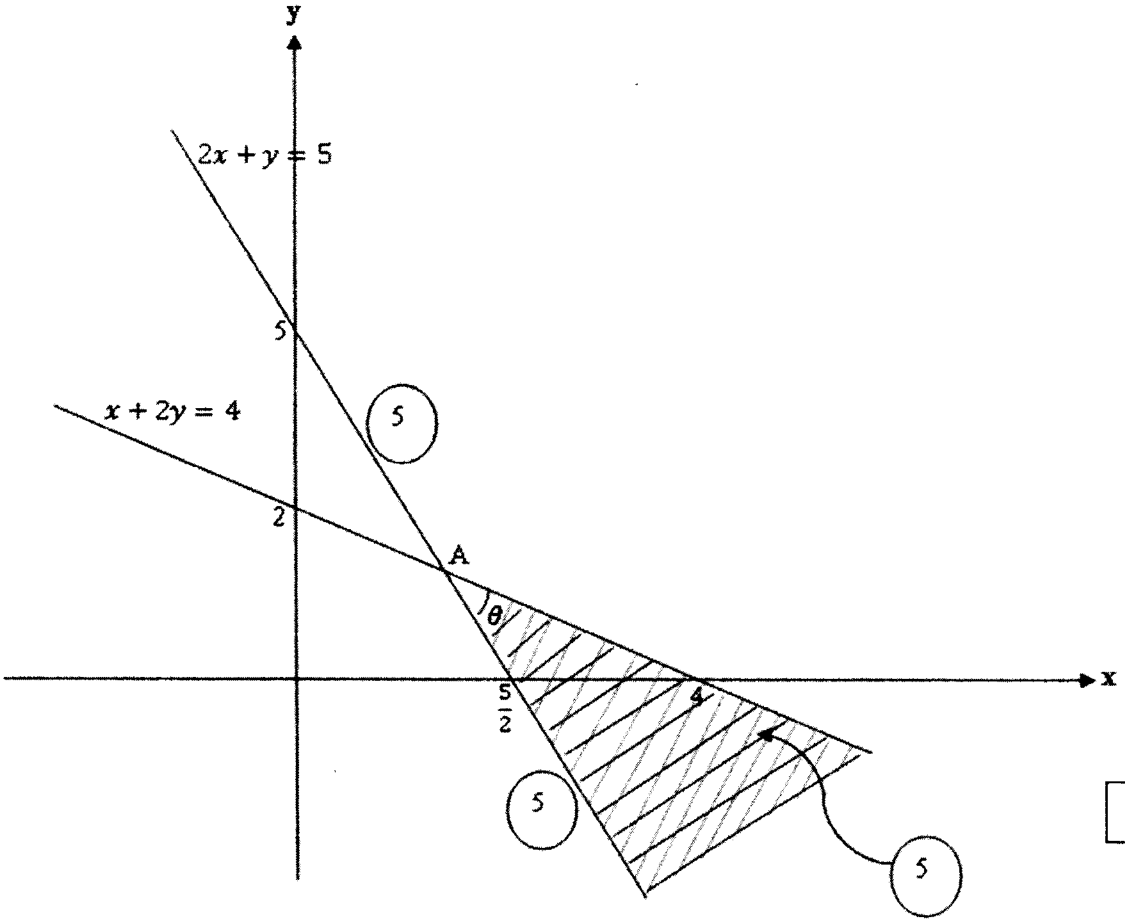
එම නිසා, $x-y-1=0$ අවශ්‍ය සමච්ඡේදකය නොවේ.

$\therefore\ x+y-3=0$ අවශ්‍ය සමච්ඡේදකය වේ. 05

35

$2x+y=5$ හා $x+2y=4$ සමගාමීව විසඳීමෙන්, $x=2$ හා $y=1$ ලැබේ.

$\therefore\ A\equiv(2,1).$ 05



20

S හි කේන්ද්‍රය $x+y-3=0$ මත පිහිටිය යුතුය.

එවිට S හි කේන්ද්‍රය $(2+t,1-t)$ ආකාරයට ලිවිය හැක. 05

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්, $\left|\dfrac{2(2+t)+(1-t)-5}{\sqrt{5}}\right|=\sqrt{5}.$ 10

$|t|=5$

$t=\pm5$ 05

$C\equiv(7,-4)$ හෝ $(-3,6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුල නොපිහිටයි. 05

05

S හි සමීකරණය

$(x-7)^2+(y+4)^2=5$ 05

$x^2-14x+49+y^2+8y+16=5$

$x^2+y^2-14x+8y+60=0$ 05

40

වෙනත් ක්‍රමයක්

$C \equiv (t', 3-t')$ 05

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්,

$\frac{|2t' + (3 - t' - 5)|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ 10

$|t' - 2| = 5$

$t' = 7$ or $t' = -3$ 05

$C \equiv (7, -4)$ හෝ $(-3, 6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුළ නොපිහිටයි. 05

05

S හි සමීකරණය:

$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 5$ 05

$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$ 05

40

05

$x_0 = 2, y_0 = 1, g = -7, f = 4, c = 60$ සමග $x_0x + y_0y + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$
මගින් $2x + y - 7(x+2) + 4(y+1) + 60 = 0$ ලැබේ.

i.e. $-5x + 5y = -50$

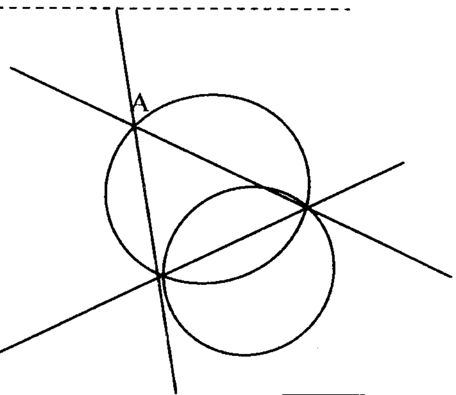
$x - y = 10$ 05

10

අවශ්‍ය වෘත්තයෙහි සමීකරණය,

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0$ 10

ආකාරයට ලිවිය හැක.



$A \equiv (2,1)$ මෙම වෘත්තය මත වේ.

$\therefore 4 + 1 - 28 + 8 + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0$ 05

$45 - 9\lambda = 0$

$\lambda = 5$ 05

එම නිසා අවශ්‍ය වෘත්තය: $x^2 + y^2 - 9x + 3y + 10 = 0$ 05

25

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x+\alpha)+B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\,(>0)$, B හා $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2-\sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවද $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a:b:c = 1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda\,\sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

(a) $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$= \cos^2 x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \quad = \cos^2 x - \sin x\cos x \quad 5$$

$$05 \quad = \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos 2x - \sin 2x\} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right\} + \frac{1}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right\} + \frac{1}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \quad 05$$

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 05

35

$f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

05

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z} \quad 05$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2n\pi + \frac{\pi}{12} \text{ හෝ } 2x = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{24} \text{ හෝ } x = n\pi - \frac{7\pi}{24} \quad 05$$

$$x = \frac{\pi}{24}, -\frac{7\pi}{24} \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

05

$\boxed{20}$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$4 - 4\tan x = 2 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})\tan^2 x$$

$$4 - (2 + \sqrt{2}) - 4\tan x = (2 + \sqrt{2})\tan^2 x \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)} \quad 05$$

$$\text{(i)} \times (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - 4(2 - \sqrt{2})\tan x = (2^2 - (\sqrt{2})^2)\tan^2 x$$

$$2\tan^2 x + 4(2 - \sqrt{2})\tan x - (2 - (\sqrt{2}))^2 = 0 \quad 05$$

$$2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0, \text{ මෙහි, } k = (2 - \sqrt{2}). \quad 05$$

$\boxed{15}$

05

$$\tan x = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k^2}}{4} \quad = \frac{-2k \pm \sqrt{6}k}{2}$$

05

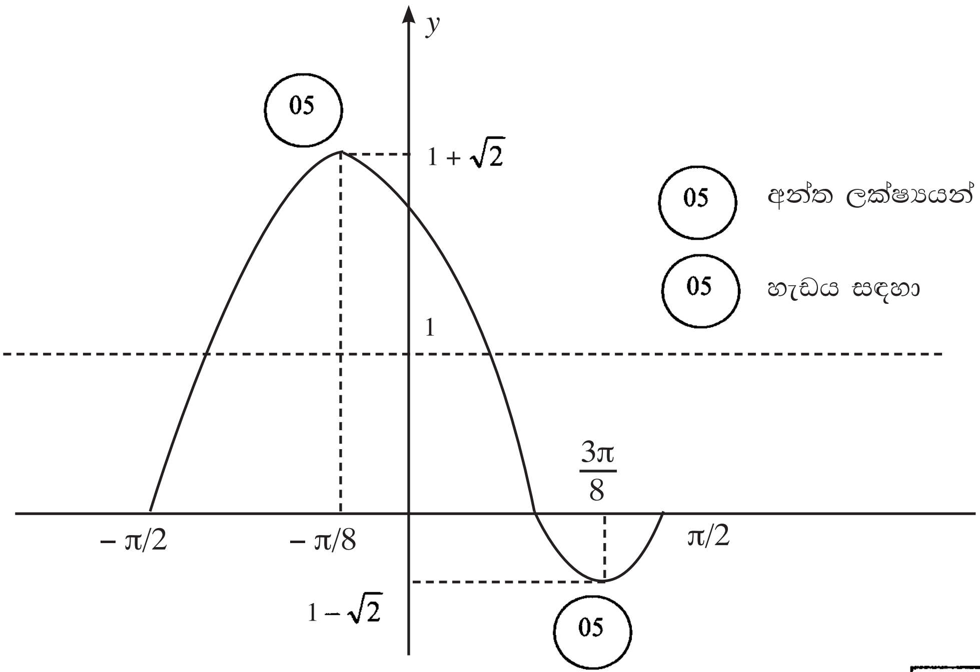
$$\tan\frac{\pi}{24} = -(2 - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{6}}{2}(2 - \sqrt{2}); \left(\because \tan\frac{\pi}{24} > 0 \right) \quad 05$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \quad 05$$

$\boxed{20}$

$$y = 2f(x)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



20

(b) **සයින් සූත්‍රයෙන්:** $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ 05

05

05 05

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C\cos(A-B) - 2\sin C\cos(A+B) \quad 05$$

$$= 2\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$= 4\sin C\sin A\sin B \quad 05$$

$$= 4\sin C\frac{\sin A}{a}.\frac{\sin B}{b}.ab \quad 05$$

$$= 4\sin C\frac{\sin C}{c}.\frac{\sin C}{c}.ab$$

$$\Rightarrow c^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4ab\sin^3 C \quad 05$$

$$\mu^2 a^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4a\lambda a\sin^3 C \quad (\because a:b:c = 1:\lambda:\mu) \quad 05$$

$$\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda\sin^3 C$$

35