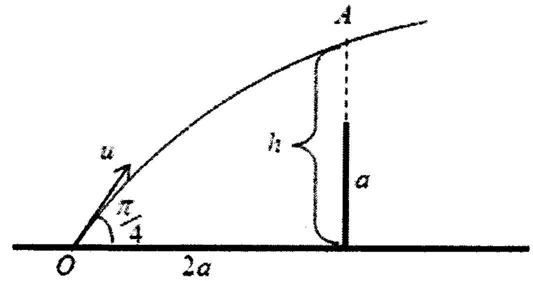
2.2.3. **II** ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. තිරස් බිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u වේගයෙන් තිරස සමග $\frac{\pi}{4}$ කෝණයක් සාදන දිශාවකින්, උස a වූ ද O සිට $2a$ තිරස් දුරකින් වූ ද සිරස් තාප්පයක් දෙසට අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. $u > 2\sqrt{ga}$ නම්, අංශුව තාප්පයට ඉහළින් යන බව පෙන්වන්න.

$u > 2\sqrt{ga}$ යැයි ගනිමු.



O සිට A දක්වා චලිතය සඳහා : $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$$\rightarrow \quad 2a = u\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)t \qquad 5$$

$$t = \frac{2\sqrt{2}a}{u}$$

$$\uparrow \quad h = u\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad 10$$

$$= 2a - \frac{1}{2}g.\frac{8a^2}{u^2} = 2a - \frac{4ga^2}{u^2} \qquad 5$$

$$> 2a - \frac{4ga^2}{4ga} \left(\because u^2 > 4ga\right)$$

$$= a$$

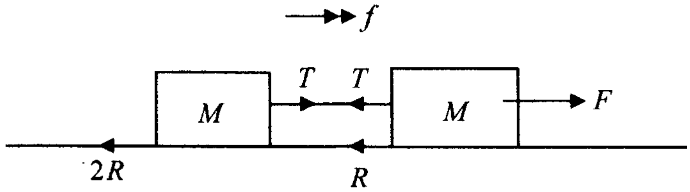
$\Rightarrow h > a$ වන අතර එමනිසා අංශුව බිත්තියට ඉහළින් යයි. 5

$\boxed{25}$

2 වන ප්‍රශ්නය

2. ස්කන්ධය M kg වූ වාහනයක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය කේබලයක් මගින් එම ස්කන්ධය ම සහිත ට්‍රේලරයක් සෘජු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යයි. වාහනයේ චලිතයට හා ට්‍රේලරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිව්ටන R හා $2R$ වේ. වාහනයේ එන්ජිම P kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් වාහනය $V\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන මොහොතේ දී කේබලයේ ආතතිය නිව්ටන $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1000P}{V}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000P}{V} N$. 5



$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$ පද්ධතිය සඳහා: $F - 3R = 2Mf$ ----- (i) 10

$\longrightarrow$ ට්‍රේලරය සඳහා: $T - 2R = Mf$ ------(ii) 5

(i) සහ (ii) න්,

$$2(T-2R) = F - 3R$$

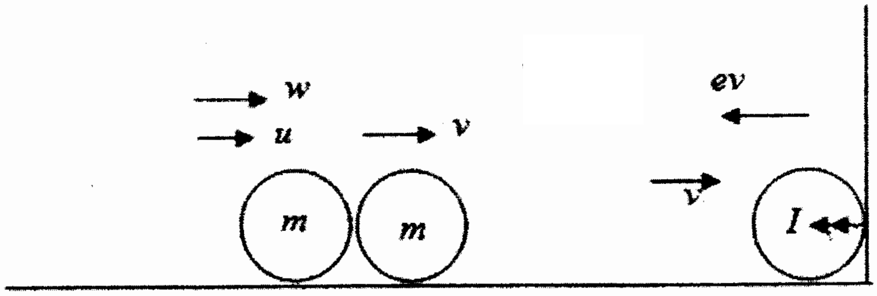
$$T = \frac{1}{2}(R+F) \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left(R + \frac{1000P}{V}\right) N.$$

$\boxed{25}$

3 වන ප්‍රශ්නය

3. **ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත, u වේගයෙන් සිරස් බිත්තියක් දෙසට, බිත්තියට ලම්බ සරල රේඛාවක චලනය වේ. බිත්තිය සමග ගැටීමට පෙර P අංශුව, එහි පෙතෙහි නිශ්චලව ඇති එම ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් සමග සරල ලෙස ගැටෙන අතර, Q අංශුව ඉන්පසුව බිත්තියේ ගැටී පොලා පනී. ගැටුම් දෙක ම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ වේ. Q අංශුව මත බිත්තියෙන් ඇති කරන ආවේගය $\frac{1}{2}(1+e)^2 mu$ බව පෙන්වන්න.**



පළමු ගැටුම සඳහා

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ **පද්ධතියට** $\longrightarrow$ $mv + mw - mu = 0$ 5

$v + w = u$

නිවුටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය: $v - w = eu$ 10

$v = \frac{1}{2}(1+e)\,u$

දෙවැනි ගැටුම සඳහා,

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$; Q **සඳහා,** $\longleftarrow$ $I = mev - (-mv)$ 5

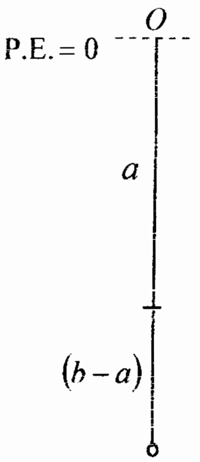
$= (1+e)\,mv$

එම නිසා Q මත ආවේගය $= \frac{1}{2}(1+e)^2\, mu$ 5

25

4 වන ප්‍රශ්නය

4. **ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. O හි නිශ්චලතාවයේ සිට අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, පසුව සිදු වන චලිතයේ දී තන්තුවේ උපරිම දිග සොයන්න.**



O සහ පහත්ම ලක්ෂ්‍යය යන දෙකේදීම චාලක ශක්තිය ශූන්‍ය වන බැවින්,

ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණයෙන්:

$$0 + \frac{1}{2}\frac{4mg}{a}(b-a)^2 - mgb = 0$$ 15

චා. ශ. 5
වි.ශ. 5
සමීකරණය 5

$$2(b-a)^2 = ab$$

$$2b^2 + 2a^2 - 5ab = 0$$ 5

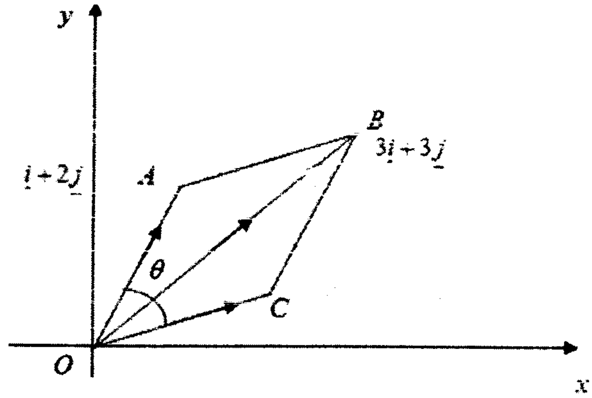
$$(b-2a)(2b-a) = 0 \quad \Rightarrow b = 2a \quad (\because b > a)$$ 5

$\boxed{25}$

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

$A\hat{O}C = \theta$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ සැලකීමෙන් $\cos\theta = \frac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -(\underline{i} + 2\underline{j}) + (3\underline{i} + 3\underline{j})$$
$$= 2\underline{i} + \underline{j}$$ 5

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ නිසා $\overrightarrow{OC} = 2\underline{i} + \underline{j}$ වේ. 5

අදිශ ගුණිතය $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = (\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (2\underline{i} + \underline{j}) = 4$ 5

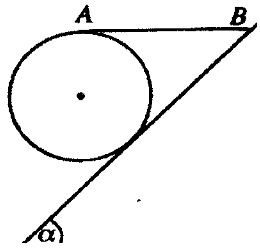
5 $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}| \cos\theta = 4$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$ 5

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. බර W වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත නිශ්චලව ඇත්තේ, ගෝලයේ උච්චතම ලක්ෂ්‍යය වූ A ට හා ආනත තලයේ B ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කරනු ලැබූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. AB තන්තුව තිරස් ව පවතින විට ගෝලය සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ තිබේ. ඝර්ෂණ කෝණය $\dfrac{\alpha}{2}$ බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



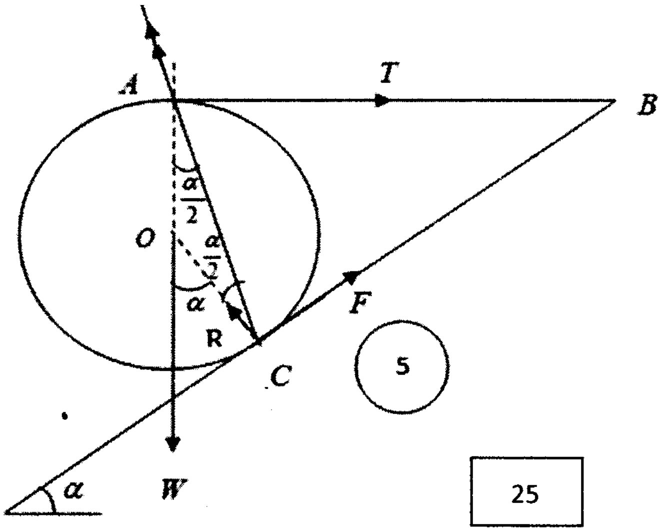
ඝර්ෂණ කෝණය $= O\hat{C}A$, 5

හා $O\hat{C}A = \dfrac{\alpha}{2}$ 5

A හි ඒක ලක්ෂ්‍යය බල සඳහා ලාමි ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්.

$$\frac{T}{\sin\left(\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{W}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$$ 5

$$T = W \tan\frac{\alpha}{2}$$ 5



5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$C \curvearrowleft \quad W a \sin\alpha = T(a + a\cos\alpha)$ 5

$$T = \frac{W\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = W\tan\frac{\alpha}{2}$$

5

10

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $P((A\cup B)\cap(A'\cup B')) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ බව පෙන්වන්න.

$$P((A\cup B)\cap(A'\cup B')) = P\left((A\cup B)\cap(A\cap B)'\right) = P(A\cup B)-P((A\cup B)\cap(A\cap B))$$ 10

5

$$[\because P(X\cap Y')=P(X)-P(X\cap Y)]$$

5 $$= P(A\cup B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$ 5

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් $P((A\cup B)\cap(A'\cup B'))$ 10

5 $= P(A\cap B')+P(B\cap A') \quad \because [(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B'] = [A\cap B']\cup[B\cap A']$

$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ 5

5

$\boxed{25}$

8 වන ප්‍රශ්නය

8. මල්ලක, ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ රතු බෝල 6 ක් ද සුදු බෝල 4 ක් ද අඩංගු වේ. බෝල තුනක්, වරකට එක බැගින්, ප්‍රතිස්ථාපනයකින් තොරව, සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. දෙවැනි බෝලය සුදු එකක් බව දී ඇති විට, තුන්වැනි බෝලය රතු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

R: රතු., W: සුදු

$$P(3\text{ වෙනි } R \mid 2\text{ වෙනි } W) = \frac{P(RWR)+P(WWR)}{P(2\text{ වෙනි } W)}$$ 5 5 5

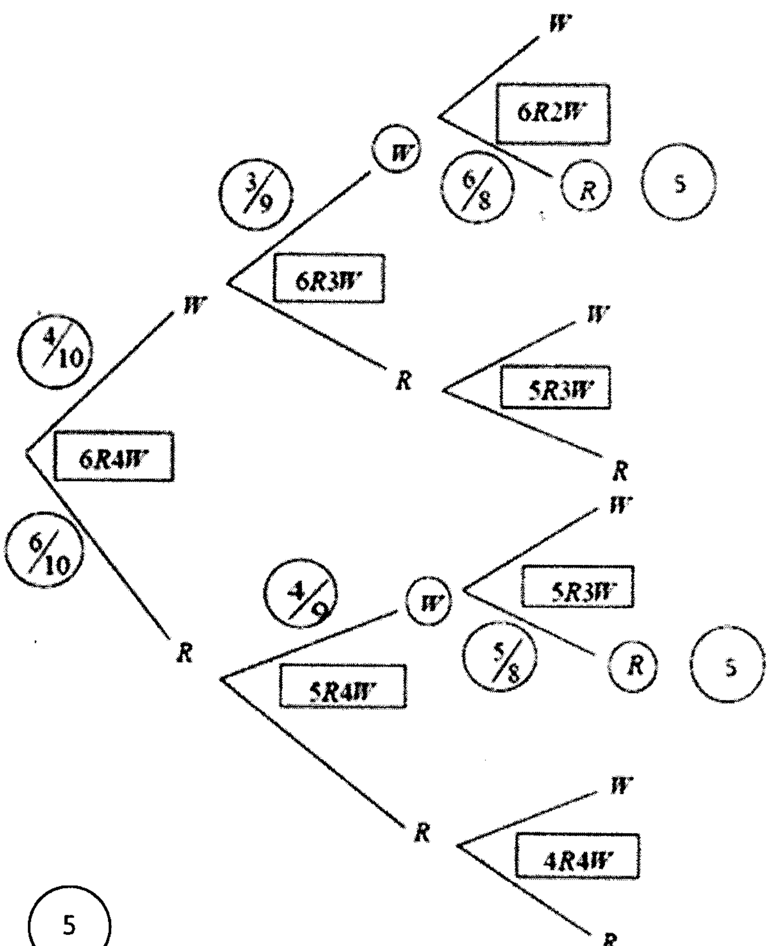
$$= \left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\right) \Big/ \left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right)$$ 5

$$=\frac{2}{3}$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

R: රතු, W: සුදු



5

$$P(3\text{ වෙනි } R \mid 2\text{ වෙනි } W) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8} \Big/ \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}$$ 5

$$=\frac{2}{3}$$ 5

25

9 වන ප්‍රශ්නය

9. **නිරීක්ෂණ පහක මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 7 හා 9 වේ. නිරීක්ෂණවල එක ම මාතය 11 වේ. නිරීක්ෂණ සියල්ල ධන නිඛිල වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වැඩිතම නිරීක්ෂණය හා අඩුතම නිරීක්ෂණය සොයන්න.**

10

නිරීක්ෂණ: $x,\ y,\ 9,\ 11,\ 11$

$$\frac{x+y+31}{5} = 7 \quad 5$$

$$\Rightarrow x+y=4$$

x හා y ධන නිඛිල නිසා, $(x=1,\ y=3)$, $(x=2,\ y=2)$ හෝ $(x=3,\ y=1)$.

දැන්, එකම මාතය 11 වන බැවින් නිරීක්ෂණ වන්නේ 1, 3, 9, 11, 11. 5

විශාලතම නිරීක්ෂණය $= 11$ 5

අඩුතම නිරීක්ෂණය $= 1$

$\boxed{25}$

10 වන ප්‍රශ්නය

10. පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ 100 ක සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 31.8 වේ.

5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
16	x	30	y	20

x හා y හි අගයන් සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය නිමානය කරන්න.

නිරීක්ෂණ 100 හි මුළු අගය $= 10\times 16 + 20x + 30\times 30 + 40y + 50\times 20 = 31.8\times 100$ 5

$$2x + 4y = 318 - 206 = 112$$

$x + 2y = 56$ ....(i)

$66 + x + y = 100$ 5

$x + y = 34$ ....(ii)

$\therefore x = 12$ සහ $y = 22$ 5

මධ්‍යස්ථය $= 25 + \dfrac{50-28}{30}\times 10$ 5

$= 25 + \dfrac{22}{3}$

$= \dfrac{97}{3}$

≈ 32.33 5

$\boxed{25}$

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත අචල සුමට තලයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක P හා Q අංශු දෙකක් තබා ඇත. O හරහා වූ උපරිම බෑවුම් රේඛාව දිගේ උඩු අතට P අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර, එම මොහොතේ ම, Q අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශු දෙක ආනත තලය හැර නොයන බව උපකල්පනය කරමින්, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, P අංශුව O ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන මොහොතේ දී Q අංශුව O සිට $\dfrac{2u^2}{g\sin\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

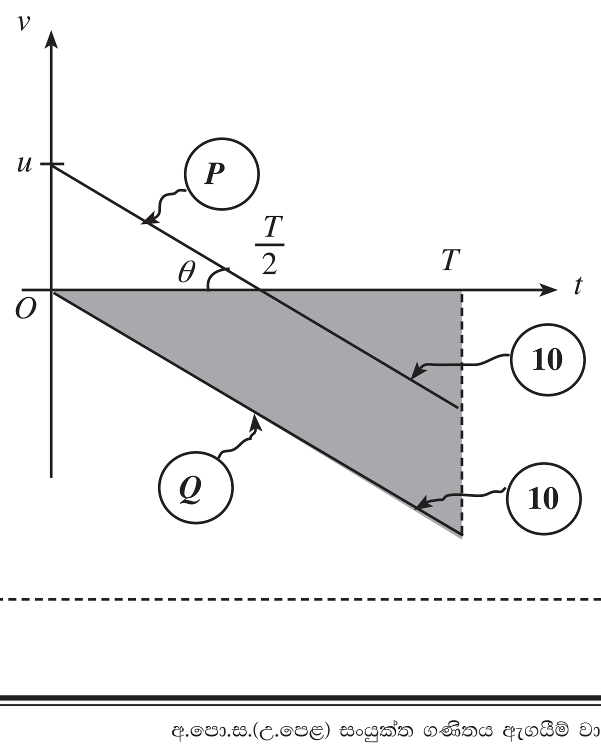
(*b*) ඍජු සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක් $\mathbf{u}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගලා බසී. A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක එකක් එක් ඉවුරක ද අනෙක අනෙක් ඉවුරේ ද පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{AB}$ යන්න $\mathbf{u}$ සමග α සුළු කෝණයක් සාදන පරිදි ය. පිරිමි ළමයෙක් A වලින් ආරම්භ කර, ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට විශාලත්වය $2u$ වූ නියත ප්‍රවේගයකින් පිහිනමින්, B වෙත ළඟා වෙයි; මෙහි $u=|\mathbf{u}|$ වේ. ඔහු ඉන්පසු, B වලින් ආරම්භ කර A වෙත ආපසු පැමිණෙන පරිදි ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට එම $2u$ විශාලත්වය ම සහිත ප්‍රවේගයකින් පිහිනයි. A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

ඒ නයින්, A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ජලයට සාපේක්ෂ ව ඔහුගේ ප්‍රවේගය පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BA}$ සමග එක ම θ කෝණයක් සෑදිය යුතු බව පෙන්වන්න; මෙහි $\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$ වේ.

B සිට A දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය, A සිට B දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය මෙන් $k\,(1<k<3)$ ගුණයක් නම්, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k+1}{k-1}\right)\cos\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta$ හා $\cos\theta$ සඳහා වූ ඉහත ප්‍රකාශන භාවිතයෙන් $\cos\alpha=\dfrac{(k-1)}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}}$ බව ද පෙන්වන්න.

(*a*)



20

$$\tan\theta = g\sin\alpha = \frac{u}{T/2} \quad 5 \quad 5$$

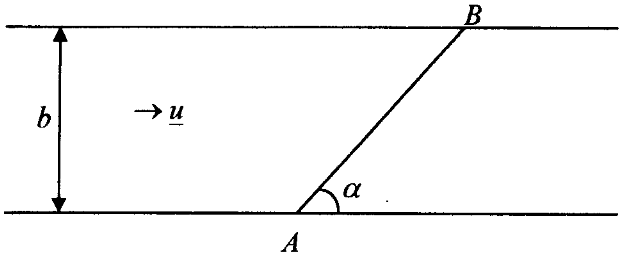
$$\therefore T = \frac{2u}{g\sin\alpha} \quad 5$$

P අංශුව ආපසු O වෙත පැමිණෙන විට Q හි O සිට දුර = අඳුරු කල ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2}\times T\times 2u = \frac{2u^2}{g\sin\alpha} \quad 10 \quad 5$$

$\boxed{30}$

(*b*)



$\underline{V}(Boy, E) = \underline{V}(Boy, W) + \underline{V}(W, E)$ 5

$= \underline{V}(W, E) + \underline{V}(Boy, W)$

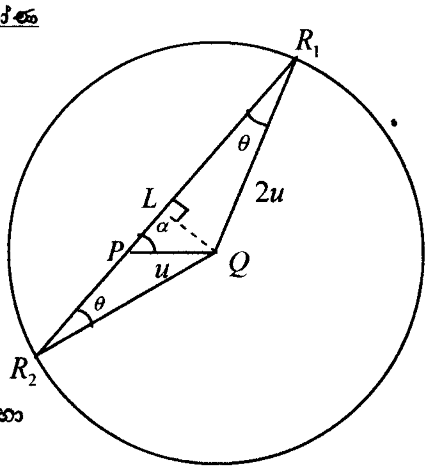
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$ 5

$= \overrightarrow{PR_i}$ $\quad i = 1 \nearrow$ (A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා)

5 $\quad i = 2 \swarrow$ (B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා)

<u>ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ</u>

$R_2R_1 // AB$



15 A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා

15 B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා

$\boxed{45}$

$QL = 2u\sin\theta \;\; = u\sin\alpha$

5 5

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\alpha$

10

$PR_1 = 2u\cos\theta + u\cos\alpha$ 5 $PR_2 = 2u\cos\theta - u\cos\alpha$ 5

$T_1 = \frac{AB}{2u\cos\theta + u\cos\alpha}$ 5 $T_2 = \frac{AB}{2u\cos\theta - u\cos\alpha}$ 5

$T_2 = kT_1 \;\; \Rightarrow 2u\cos\theta + u\cos\alpha = k(2u\cos\theta - u\cos\alpha)$ 5

$2(k-1)\cos\theta = (k+1)\cos\alpha$ 5

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\cos\alpha$

30

$\frac{1}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 \cos^2\alpha = 1 \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$ 5

$\left[\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - 1\right]\cos^2\alpha = 3$ 5

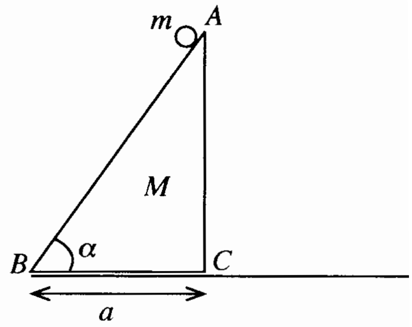
$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3(k-1)^2}{4k}$ $\therefore \cos\alpha = \frac{k-1}{2}\sqrt{\frac{3}{k}}$ 5

15

---

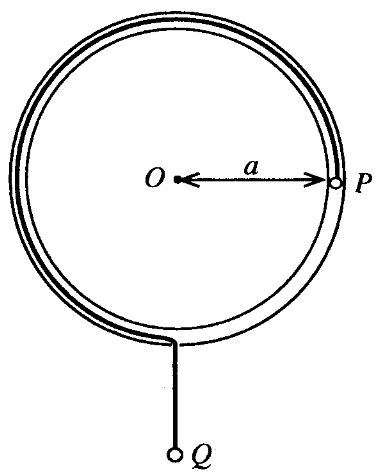
12 වන ප්‍රශ්නය

12. (a) දී ඇති රූප සටහනෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C = \alpha$, $A\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ හා $BC = a$ වේ. සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත BC අයත් මුහුණත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් AB රේඛාව මත A ලක්ෂ්‍යයෙහි සීරුවෙන් තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන තෙක්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වා, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ව අංශුවේ ත්වරණය සොයන්න.

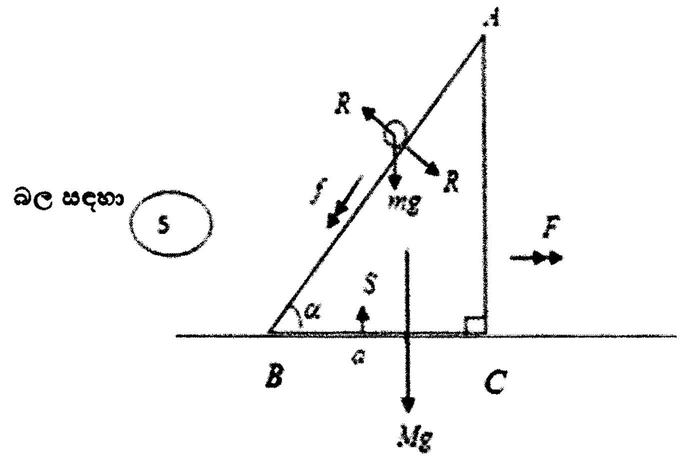


දැන්, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ හා $M = \frac{5m}{2}$ යැයි සිතමු. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන මොහොතේ දී කුඤ්ඤයේ වේගය $\sqrt{\frac{2ag}{21}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර නළයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $\frac{3\pi a}{2}$ ට වඩා වැඩි සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, OP තිරස් ව ඇතිව නළය තුළ අල්වා තැබූ, ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නළය තුළින් ද නළයේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති කුඩා සුමට සිදුරක් තුළින් ද යමින් අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවක් දරා සිටියි. තන්තුව තදව ඇතිව ඉහත පිහිටීමෙන් P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $\theta\left(0 < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් OP හැරී ඇති විට P අංශුවේ වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, P අංශුව මත නළයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



(a)



$\underline{a}(M,E) = \rightarrow F$ and $\underline{a}(m,M) = f$ $\alpha \swarrow$ යයි ගනිමු. 5

එවිට $\underline{a}(m,E) = \alpha \swarrow f \; \xrightarrow{\;} F$ 10

$\underline{F} = m\underline{a}$: යොදමු.

පද්ධතිය සඳහා $\longrightarrow$ $0 = MF + m(F - f\cos\alpha)$ --------- (i) 15

m සඳහා $\swarrow$ $mg\sin\alpha = m(f - F\cos\alpha)$ ---------- (ii) 15

$$(\text{i}) \Rightarrow f = \frac{(m+M)F}{m\cos\alpha}$$

$$(\text{ii}) \Rightarrow g\sin\alpha = \frac{(m+M)F}{m\cos\alpha} - F\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha\cos\alpha = (M + m - m\cos^2\alpha)F$$

$$\therefore F = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$ 10

$$f = \frac{(M+m)}{m\cos\alpha}\,\frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{(M + m\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$ 10

70

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ හා $M = \frac{5m}{2}$ යෙදූ විට $F = \frac{g}{6}$ හා $f = \frac{7g}{6\sqrt{2}}$. 5

M සාපේක්ෂව m හි චලිතය සඳහා $\swarrow$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදමු.

$$\sqrt{2}a = \frac{1}{2}.\frac{7g}{6\sqrt{2}} \times T^2$$ 5

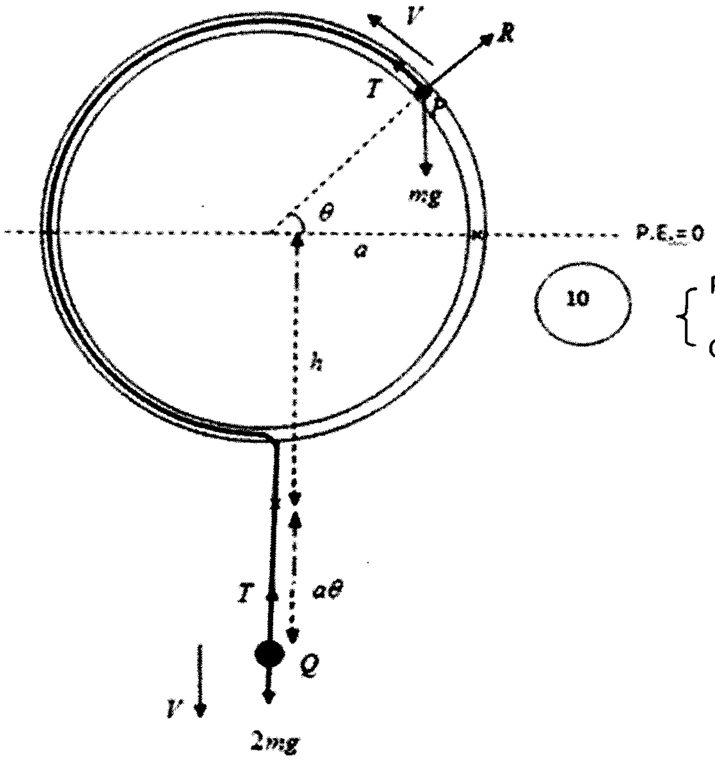
$$T = \sqrt{\frac{24a}{7g}}$$ 5

E සාපේක්ෂව M හි චලිතය සඳහා $\rightarrow$ $v = u + at$ යොදමු.

$$v = \frac{g}{6}\sqrt{\frac{24a}{7g}} = \sqrt{\frac{2ga}{21}}$$ 5

20

12.(*b*)



10

Pහි බල 5

Qහි බල 5

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය මගින්,

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}(2m)V^2 + mga\sin\theta - 2mg(a\theta + h) = -2mgh$$ 25

වා.ශ.- 10 වි.ශ.- 10

සමීකරණ 5

$$\frac{3}{2}V^2 = 2ag\theta - ga\sin\theta$$

$$V^2 = \frac{2}{3}ga(2\theta - \sin\theta)$$ 5

$\boxed{40}$

P, අංශුව සඳහා $\underline{F} = m\underline{a} \Rightarrow$

$$mg\sin\theta - R = \frac{mV^2}{a}$$ 10

$$R = mg\sin\theta - \frac{2mg}{3}(2\theta - \sin\theta)$$

5

$$= \frac{mg}{3}[3\sin\theta - 4\theta + 2\sin\theta]$$

$$= \frac{mg}{3}[5\sin\theta - 4\theta]$$ 5

$\boxed{20}$

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග $4a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $8mg$ වූ සිහින් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අචල වන සේ සිරස් ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඇඳා තිබේ. P අංශුව O ට සිරස් ව ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිත ව ඇත. $OA = \frac{7a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

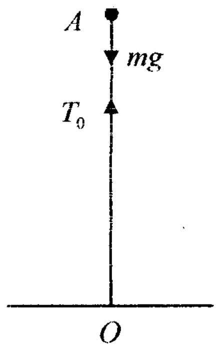
දැන්, එම m ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් P ට සීරුවෙන් ඇඳනු ලබන අතර සංයුක්ත අංශුව A හි නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය ආරම්භ කරයි. සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} = -\frac{g}{a}x$ බව පෙන්වන්න; මෙහි x යනු $OB = 3a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ සිට සංයුක්ත අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.

සංයුක්ත අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. OC දිග ද A සිට C දක්වා චලනය වීමට සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

සංයුක්ත අංශුව C හි ඇති මොහොතේ දී Q අංශුව සීරුවෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. පසුව සිදුවන P අංශුවේ චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය $\ddot{y} = -\frac{2g}{a}y$ බව පෙන්වන්න; මෙහි y යනු A ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.

මෙම සමීකරණයට $y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, C සිට D දක්වා චලනය වීමට P අංශුව ගන්නා කාලය $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු $OD = 4a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. D වෙත ළඟා වන විට P අංශුවේ වේගය ද සොයන්න.



සමතුලිතතාව සඳහා ↑ $T_0 = mg$ 5

තවද, $T_0 = \frac{8mg}{4a}(4a - OA)$ 5

$\therefore \frac{8mg}{4a}(4a - OA) = mg$

5 $8a - 2(OA) = a \Rightarrow OA = \frac{7a}{2}$

$\boxed{15}$

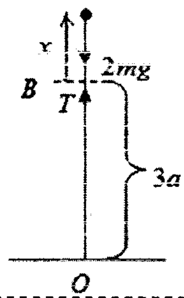
සංයුක්ත අංශුවේ චලිතය සඳහා

↑ $\underline{F} = m\underline{a}$

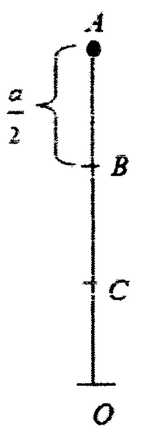
$T - 2mg = 2m\ddot{x}$ 10

5 $\frac{8mg}{4a}(a - x) - 2mg = 2m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{a}x$ 5



$\boxed{20}$



මෙම සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය B වේ. මෙහි $OB = 3a$. 5

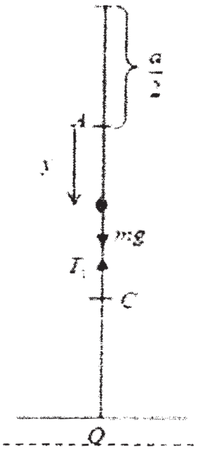
$\therefore$ විස්තාරය $= AB = \frac{a}{2}$ හා කාලාවර්තය $= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$ 5

එවිට $BC = \frac{a}{2}$ 5 $OC = OB - BC = 3a - \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$ 5

A සිට C දක්වා කාලය $= \frac{1}{2} \times$ කාලාවර්තය $= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ 5

5

$\boxed{30}$



P අංශුව සඳහා, $\downarrow \underline{F} = m\underline{a}$

$$-T_1 + mg = m\ddot{y} \quad 10$$

$$5 \quad -\frac{8mg}{4a}\left(y + \frac{a}{2}\right) + mg = m\ddot{y}$$

සුළු කිරීම - 5

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}y \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{i})$$

$\boxed{20}$

$$y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{ii})$$

$$\dot{y} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{iii}) \quad 5$$

$$\ddot{y} = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t) \quad 5$$

$$= -\omega^2 y \quad 5$$

(i) සමග සැසඳීමෙන්, $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ ලැබේ. 5

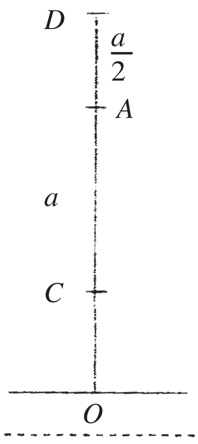
C හිදී P ට අදාලව $t = 0$ යැයි ගනිමු .

5 $\because t = 0$ විට $y = a$, (ii) $\Rightarrow a = \alpha$ 5

5 $\because t = 0$ විට $\dot{y} = 0$, (iii) $\Rightarrow \beta = 0$ 5

$\therefore\ y = a\cos\omega t$

$\boxed{40}$



C සිට D දක්වා ගතවන කාලය t_1 යැයි ගනිමු .

$\because t = t_1$ විට $y = -\frac{a}{2}$. $-\frac{a}{2} = a\cos\omega t_1$ ලැබේ. 5

$$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3} \quad 5$$

$$\therefore\ t_1 = \frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}} \quad 5$$

$\boxed{15}$

$t = t_1$ විට (D ලක්ෂ්‍යයෙහි දී) : $\dot{y} = -a\omega\sin\omega t_1 = -a\sqrt{\frac{2g}{a}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}$ 5

අවශ්‍ය වේගය $= \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ 5

$\boxed{10}$

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $ABCD$ යනු $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපීසියමක් යැයි ගනිමු. තව ද $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$ යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. AE හා BD වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F මගින් $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ යන්න සපුරාලයි; මෙහි $\lambda (0 < \lambda < 1)$ නියතයකි. $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\mathbf{p} + \frac{1}{3}\mathbf{q}$ බව හා $\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න.

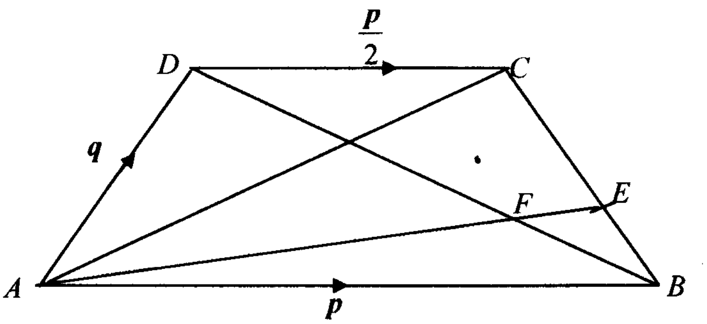
ඒ නයින්, λ හි අගය සොයන්න.

(*b*) $ABCD$ යනු පැත්තක දිග මීටර a වූ සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන $4, 6\sqrt{2}, 8, 10, X$ හා Y වූ බල පිළිවෙළින් AD, CD, AC, BD, AB හා CB දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය $\overrightarrow{OE}$ දිගේ ක්‍රියාකරන තනි සම්ප්‍රයුක්තයකට ඌනනය වේ; මෙහි O හා E යනු පිළිවෙළින් AC හා CD වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. X හා Y හි අගයන් සොයා, සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය නිව්ටන $4K$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $K = 2-\sqrt{2}$ වේ.

F යනු $OAFD$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. ඉහත බල පද්ධතියට තුල්‍ය වන, එකක් $\overrightarrow{AD}$ දිගේ ද අනෙක F ලක්ෂ්‍යය හරහා ද වන, **බල දෙක** සොයන්න.

බල පිහිටන තලයේ $ABCD$ අතට ක්‍රියාකරන ඝූර්ණය නිව්ටන මීටර $6Ka$ වන බල යුග්මයක් මුල් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(a)



5 5

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{p}}{2}$ 5

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{p} + \left(\boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{p}}{2}\right) = \boldsymbol{q} - \frac{\boldsymbol{p}}{2}$ 5

5

$\therefore\ \overrightarrow{BE} = \frac{\boldsymbol{q}}{3} - \frac{\boldsymbol{p}}{6}$ 5

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \boldsymbol{p} + \left(\frac{\boldsymbol{q}}{3} - \frac{\boldsymbol{p}}{6}\right) \quad = \frac{5\boldsymbol{p}}{6} + \frac{\boldsymbol{q}}{3}$ 5

5

$\boxed{40}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ 5

$= \boldsymbol{p} + \lambda\overrightarrow{BD}$

$= \boldsymbol{p} + \lambda(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = (1-\lambda)\boldsymbol{p} + \lambda\boldsymbol{q}$ 5

$\boxed{10}$

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$$ 5

$$(1-\lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q} = \frac{k}{6}[5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}]$$ 5

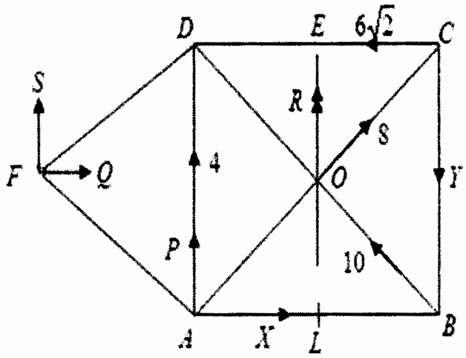
5 $\quad 1-\lambda = \frac{5k}{6}$

5 $\quad \lambda = \frac{2k}{6}$

$$\left.\begin{aligned} 1-\lambda &= \frac{5k}{6} \\ \lambda &= \frac{2k}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7}$$ 5

25

(b)



10

විභේදනයෙන්, $\rightarrow X - 6\sqrt{2} - \frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$ 5

$\Rightarrow X = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \quad = 7\sqrt{2}\ N$ 5

O වටා සූර්ණය ගැනීමෙන් $\Rightarrow X \times \frac{a}{2} - Y \times \frac{a}{2} + 6\sqrt{2} \times \frac{a}{2} - 4 \times \frac{a}{2} = 0$ 10

$Y = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4 = 13\sqrt{2} - 4\ N$ 5

සම්ප්‍රයුක්තය $= 4 - Y + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ 5

5

$= 4 - 13\sqrt{2} + 4 + 9\sqrt{2} \quad = 4(2-\sqrt{2}) \quad = 4K\ N \uparrow$. මෙහි $K = 2-\sqrt{2}$ වේ.

45

$\longrightarrow Q = 0$ $\qquad \uparrow P + S = 4K$ 5

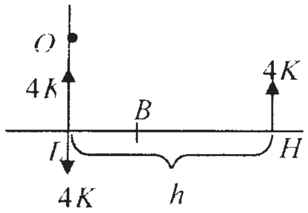
F $\quad 4K \times a = P \times \frac{a}{2}$ 5

$\therefore P = 8K\ N$ හා $S = -4K$

5 $\qquad$ 5

20

$\therefore F$ හිදී බලය $= 4K\ N\downarrow$ හා $\overrightarrow{AD}$ දිගේ බලය $= 8K\ N\uparrow$.



$\overset{\curvearrowleft}{O}$ $\quad 4Kh = 6Ka$

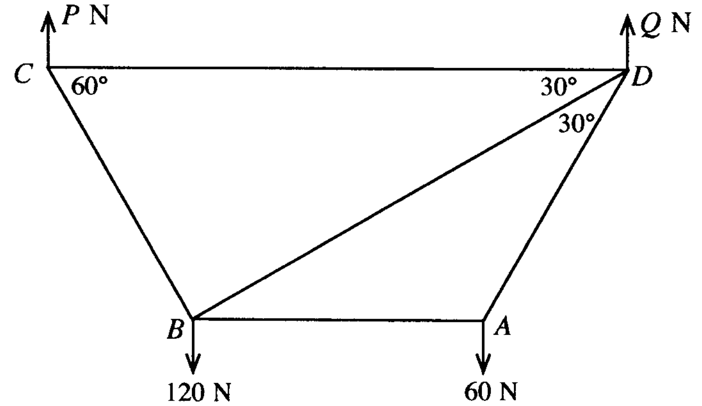
$h = \dfrac{3a}{2}\ m$ 5

නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාව: දික්කල AB රේඛාව මත $BH = a$ වන පරිදිවූ H ඔස්සේ BC ට සමාන්තරව පිහිටයි. $\boxed{10}$

15 වන ප්‍රශ්නය

15.(*a*) ඒකක දිගක බර w බැගින් වූ ද $AB = AD = l\sqrt{3}$ හා $BC = DC = l$ වූ ද AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් $ABCD$ රාමු සැකිල්ලක් සාදන පරිදි, ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්ධි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් එල්ලනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිත ව එල්ලෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{wl}{4}\left(5+\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

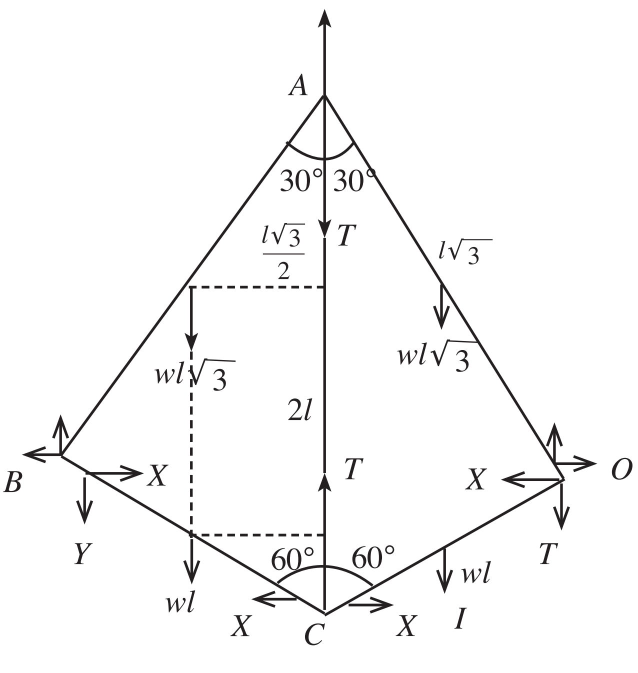
(*b*)



අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද AB, AD, BC, BD හා CD සැහැල්ලු දඬු පහක රාමු සැකිල්ලක් දී ඇති රූපයෙන් නිරූපණය වේ. A හා B හි දී පිළිවෙළින් 60 N හා 120 N භාර දරන අතර AB හා CD දඬු තිරස් ව ඇතිව රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ පිළිවෙළින් C හා D හි දී යෙදූ P N හා Q N සිරස් බල දෙකක් මගිනි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬු පහේ ම ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් ප්‍රකාශ කරමින්, සොයන්න.

(*a*)



සමමිතිය 5

රූපය 5

10

AB හා BC සඳහා $A\curvearrowright$ $\quad wl(1+\sqrt{3})\times\frac{l\sqrt{3}}{4}-X\times 2l=0 \Rightarrow X=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{8}wl$ 5

CD සඳහා $\curvearrowleft C$ $\quad X\times\frac{l}{2}-Y\times\frac{l\sqrt{3}}{2}-wl\times\frac{l\sqrt{3}}{4}=0$ 10

$$Y=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[2X-wl\sqrt{3}\right]=\frac{wl}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\right]$$ 5

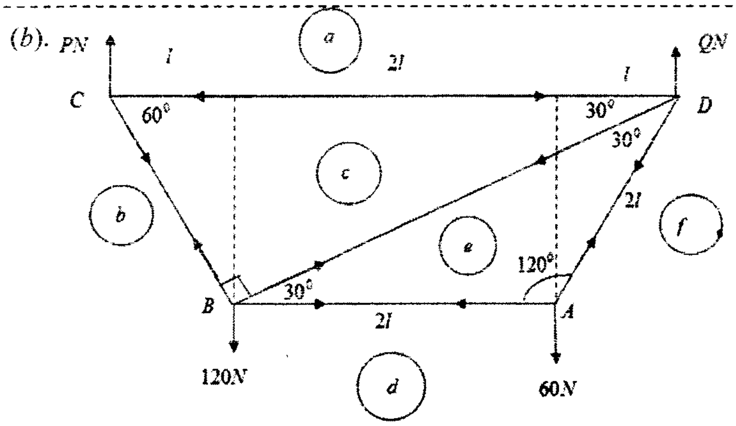
$$=\frac{wl}{8\sqrt{3}}\left(3-3\sqrt{3}\right) \quad =\frac{wl}{8}\left(\sqrt{3}-3\right)$$

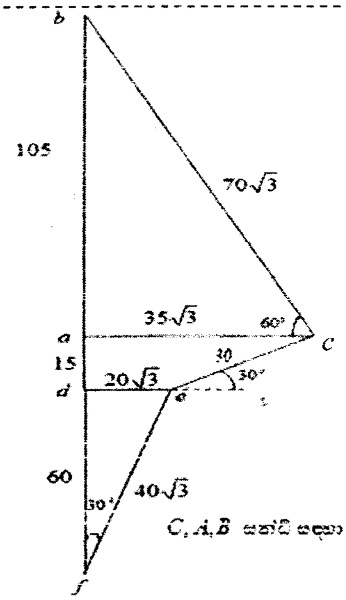
BC හා CD සඳහා $\uparrow$ $T-2wl-2Y=0$ 10

5 $\quad T=2wl+\frac{wl}{4}\left(\sqrt{3}-3\right)=\frac{wl}{4}\left[8+\sqrt{3}-3\right]=\frac{wl}{4}\left(5+\sqrt{3}\right)$ 5

60

(b).





C, A, B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන

$D\curvearrowright$ $\quad P\times 4l=120\times 3l+60\times l$

$P=105N$

ප්‍රත්‍යාබල සටහන නොමැතිව P හෝ Q සොයා ඇති නම් 10 ක් වෙන් කරන්න.

40

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතති / තෙරපුම්
CD (ca)	$35\sqrt{3}$	තෙරපුම්
BC (bc)	$70\sqrt{3}$	ආතති
BD (ec)	30	ආතති
AB (ed)	$20\sqrt{3}$	ආතති
AD (fe)	$40\sqrt{3}$	ආතති

10

10

10

10

10

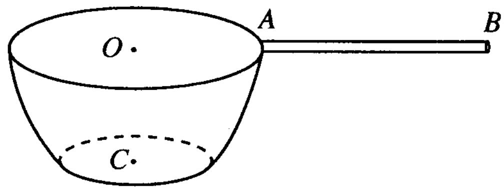
50

16 වන ප්‍රශ්නය

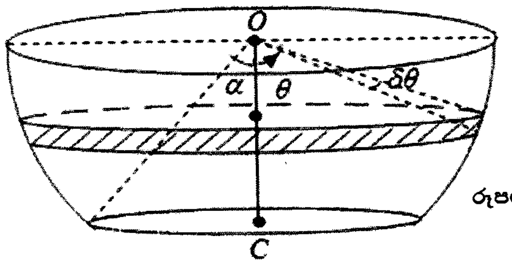
16. අරය a හා පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධගෝලීය කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටියෙහි තලයට සමාන්තර වූ ද O කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වූ ද තලයකින් කැපූ විට ලැබෙන ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න; මෙහි C යනු කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියෙහි කේන්ද්‍රය වේ.

එම σ පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ම සහිත අරය $a\sin\alpha$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක දාරය ඉහත ඡින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකර ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, OC මත O සිට $\left(\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ යැයි ද භාජනයෙහි බර W යැයි ද ගනිමු. දිග b හා බර $\frac{W}{4}$ වූ සිහින් ඒකාකාර AB දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය වන පරිදි, රූපයේ දැක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.



සාස්පාන, මිටෙහි B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර, මිට යටි අත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b=4a$ බව පෙන්වන්න.



සමමිතියෙන් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත පිහිටයි. 5

O සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{x}$ යැයි ගනිමු.

රූපයේ දැක්වෙන අත්‍යනුක මුදුවේ බර

$$=(2\pi a\sin\theta)a\delta\theta\sigma g$$

$$=2\pi a^2\sigma g\sin\theta\delta\theta$$

10

එවිට $$\bar{x}=\frac{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\pi a^2\sigma g\sin\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta}{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\pi a^2\sigma g\sin\theta\,d\theta}$$ 10

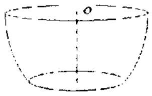
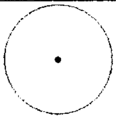
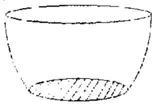
5

$$\bar{x}=a\frac{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\sin\theta\,d\theta}=\frac{\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\alpha}^{\pi/2}}{\left[-2\cos\theta\right]_{\alpha}^{\pi/2}}a=\frac{1}{4}\frac{(1+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha}a=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}a=\frac{1}{2}a\cos\alpha$$ 5

5

40

$\therefore$ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂයේ පිහිටයි.

වස්තුව	බර	$\downarrow$ O සිට දුර
	$\sigma g\cdot 2\pi a^2\cos\alpha$ 5	$\frac{1}{2}a\cos\alpha$ 5
	$\sigma g\pi a^2\sin^2\alpha$ 5	$a\cos\alpha$ 5
	$\sigma g\pi a^2\left(2\cos\alpha+\sin^2\alpha\right)$ 5	$\bar{y}$

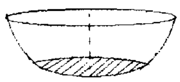
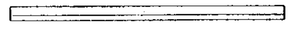
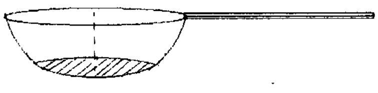
සමමිතියෙන් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත O සිට $\bar{y}$ දුරකින් පිහිටයි; මෙහි 5

$$\sigma g\pi a^2\left(2\cos\alpha+\sin\alpha\right)\bar{y}=\sigma g2\pi a^2\cos\alpha\times\frac{1}{2}a\cos\alpha+\sigma g\pi a^2\sin^2\alpha\times a\cos\alpha \quad 10$$

$$\bar{y}=\frac{a\cos\alpha\left(\cos\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\left(2\cos\alpha+\sin\alpha\right)}=\left(\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)a\cos\alpha \quad 5$$

45

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ විට $\bar{y}=\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1+1-\frac{1}{4}}\right)\frac{a}{2}\quad=\frac{5a}{14}$ 5

වස්තුව	බර	AB සිට දුර	OC රේඛාවේ සිට දුර
	W	$\frac{5a}{14}$	0 5
	$\frac{W}{4}$	0 5	$a+\frac{b}{2}$ 5
	$\frac{5W}{4}$ 5	$\bar{Y}$	$\bar{X}$

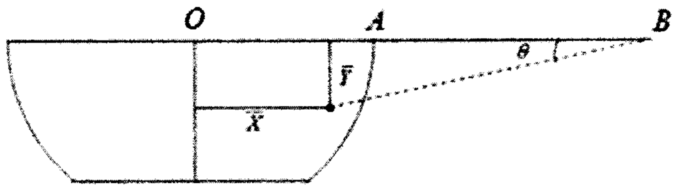
AB $\quad \frac{5W}{4}\overline{Y} = W\frac{5a}{14}$

$$\overline{Y} = \frac{2a}{7} \quad 10$$

OC $\quad \frac{5W}{4}\overline{X} = \frac{W}{4}\left(a + \frac{b}{2}\right)$

$$\overline{X} = \frac{2a+b}{10} \quad 10$$

$\boxed{45}$



$$\tan\theta = \frac{\overline{Y}}{\left(a + b - \overline{X}\right)} \quad 10$$

$$\frac{1}{7} = \frac{\frac{2a}{7}}{a + b - \left(\frac{2a+b}{10}\right)} = \frac{20a}{7[8a+9b]} \quad 5$$

$$8a + 9b = 20a$$

$$4a = 3b \quad 5$$

$\boxed{20}$

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක $P(B) > 0$ වන සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. B දී ඇතිවිට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වූ $P(A|B)$ අර්ථ දක්වන්න.

$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $0 < P(B) < 1$ වන අතර B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

විශාල සමාගමක සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 80% ක් පිරිමි වන අතර 20% ක් ගැහැණු වේ. සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 57% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 32% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. අනික් සියලු ම සේවා නියුක්තිකයෝ උපාධිධාරීහු වෙති. මෙම සමාගමේ ගැහැණු සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 40% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 45% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. සමාගමේ සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් එක් අයකු සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනු ලැබේ. එසේ තෝරාගනු ලැබූ සේවා නියුක්තිකයා,

(i) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ ගැහැණු කෙනකු වීම,

(ii) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ පිරිමි කෙනකු වීම,

(iii) පිරිමි කෙනකු බව දී ඇති විට, එම සේවා නියුක්තිකයා උපාධිධාරියකු වීම,

(iv) උපාධිධාරියකු නොවන බව දී ඇති විට එම සේවා නියුක්තිකයා ගැහැණු කෙනකු වීම,

යන සිද්ධීන් එක එකෙහි සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ යන දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා σ_x^2 යැයි ගනිමු.

(i) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) α හා β තාත්ත්වික නියත යැයි ගනිමු. $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2 = n\alpha^2\sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ බව පෙන්වන්න.

$i = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = \alpha x_i + \beta$ යැයි ගනිමු. $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ බව පෙන්වා, ඉහත (i) හා (ii) භාවිතයෙන් $\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y^2 යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව වේ.

එක්තරා විභාගයක දී අපේක්ෂකයින් ලබා ගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 ක් වේ. මෙම ලකුණු, මධ්‍යන්‍යය 50 ක් හා සම්මත අපගමනය 15 ක් වන පරිදි ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කළ යුතුව ඇත. පරිමාණගත ලකුණ වන 68 යන්නට අනුරූප මුල් ලකුණ 60 බව දී ඇත. මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

අපේක්ෂකයකු ලබා ගත් මුල් ලකුණ වූ m, ඉහත පරිමාණගත කිරීමෙන් අඩු නොවන බව තවදුරටත් දී ඇත. $m \geq 20$ බව පෙන්වන්න.

(a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 5 $\boxed{05}$

5

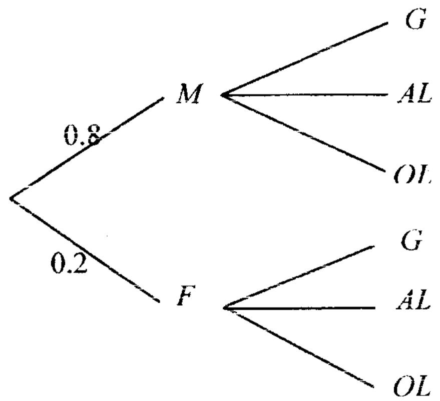
$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap B'))$ $[\because (A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap\Omega=A]$

$=P(A\cap B)+P(A\cap B')$ 5 $[\because A\cap B$ & $A\cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්]

5 $\boxed{15}$

$=\dfrac{P(B)P(A\cap B)}{P(B)}+\dfrac{P(B')P(A\cap B')}{P(B')}$

$=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$



M – පිරිමි F – ගැහැණු

OL - උපරිම සුදුසුකම O/L

AL - උපරිම සුදුසුකම A/L

G - උපාධිධාරීන්

$P(M)=0.8$ $P(F)=0.2$

$P(OL)=0.57$ $P(AL)=0.32$ $P(G)=0.11$

$P(OL|F)=0.4$ $P(AL|F)=0.45$

(i) $P(F\cap OL)=P(F)P(OL|F)$ 5

5 $=0.2\times 0.4=0.08$ $\boxed{10}$

5

(ii) $P(OL)=P(OL\cap M)+P(OL\cap F)$

$P(M\cap OL)=0.57-0.08=0.49$ 5 $\boxed{10}$

(iii) $P(G|M)=?$

$P(G)=P(M)P(G|M)+P(F)P(G|F)$ 5

$0.11=0.8\times P(G|M)+0.2\times\underbrace{(1-0.4-0.45)}_{0.15}$ 5

$P(G|M)=\dfrac{0.11-0.03}{0.8}=\dfrac{0.08}{0.8}=\dfrac{1}{10}=0.1$ 5 $\boxed{15}$

5

(iv) $P(F|G')=\dfrac{P(F\cap G')}{P(G')}=\dfrac{P(F)P(G'|F)}{1-P(G)}$

5 5

$=\dfrac{0.2\times(0.40+0.45)}{1-0.11}$ $=\dfrac{17}{89}.$ 5 $\boxed{20}$

---

17. (b) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\qquad$ $\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

(i) $\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i{}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$ $\quad$ 5

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\bar{x}^2\sum_{i=1}^{n} 1 \qquad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\bar{x}^2 + \frac{1}{n}\bar{x}^2 \times n$ $\quad$ 5

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \bar{x}^2$. $\qquad \boxed{10}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\alpha^2 x_i{}^2 + 2\alpha\beta\, x_i + \beta^2)$

$= \alpha^2\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta^2$

5 $\qquad$ 5

$= \alpha^2\left\{n\sigma_x{}^2 + n\bar{x}^2\right\} + 2\alpha\beta\, n\,\bar{x} + n\beta^2$ as $n\sigma_x{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2$

$= n\alpha^2\sigma_x{}^2 + n\left\{\alpha^2\bar{x}^2 + 2\alpha\beta\bar{x} + \beta^2\right\}$

$= n\alpha^2\sigma_x{}^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ $\quad$ 5 $\qquad \boxed{15}$

තවත් ක්‍රමයක් $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha(x_i - \bar{x}) + \alpha\bar{x} + \beta\right]^2$

$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha^2(x_i - \bar{x})^2 + 2(\alpha\bar{x} + \beta)\alpha(x_i - \bar{x}) + (\alpha\bar{x} + \beta)^2\right\}$ $\quad$ 5

$= \alpha^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha\bar{x} + \beta)^2$

$= \alpha^2 n\sigma_x{}^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\right) + (\alpha\bar{x} + \beta)^2 n$ $\quad$ 5

$= n\alpha^2\sigma_x{}^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)(n\bar{x} - n\bar{x}) + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ $\quad$ 5 $\qquad \boxed{15}$

$= n\alpha^2\sigma_x{}^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$.

5

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta) \quad = \alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta$

$= \alpha\bar{x} + \beta\frac{1}{n}n$

$= \alpha\bar{x} + \beta$. $\quad$ 5 $\qquad \boxed{10}$

$\because\ y_i = \alpha x_i + \beta$, by (ii)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = n\alpha^2\sigma_x^{\,2} + n\bar{y}^2 \quad 5$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - \bar{y}^2 = \alpha^2\sigma_x^{\,2}$$

$\therefore$ (i)න්, $\sigma_y^{\,2} = \alpha^2\sigma_x^{\,2}$. 5

10

ලකුණු කුලකය $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ යැයි ගනිමු.

$\bar{x} = 45$ බව දී ඇත.

පරිමාණගත ලකුණු $y_i = \alpha x_i + \beta$ යැයි ගනිමු. එවිට $\bar{y} = 50$ හා $\sigma_y^{\,2} = 15$ වේ.

$\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta \Rightarrow 50 = 45\alpha + \beta$ -------------- (i) 5

තවද, $y_i = 68$ වනවිට $x_i = 60$ බව දී ඇත.

$\Rightarrow 68 = 60\alpha + \beta$ ---------------- (ii) 5

(i) හා (ii) $\Rightarrow 15\alpha = 18$

$$\left.\begin{aligned} &\therefore\ \alpha = \frac{6}{5}. \\ &\beta = 50 - 45\times\frac{6}{5} = -4 \end{aligned}\right\}\ 5$$

$$\sigma_y^{\,2} = \alpha^2\sigma_x^{\,2} \Rightarrow 15 = \frac{6}{5}\sigma_x^{\,2}$$

$$\therefore\ \sigma_x^{\,2} = \frac{15\times 5}{6} = 12.5 \quad 5$$

20

$x_i = m \Rightarrow y_i \geq m.$

$\Rightarrow \frac{6}{5}x_i - 4 \geq m$ 5

$\Rightarrow \frac{6}{5}m - 4 \geq m$

$\Rightarrow \frac{m}{5} \geq 4$ 5

$\Rightarrow m \geq 20.$

10
