2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $8^n - 3^n$ යන්න 5 හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ නම් $8^n - 3^n = 8-3=5$, $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි ගනිමු.

$\Rightarrow 8^p - 3^p = 5m,$ මෙහි m ධන නිඛිලයකි. 5

$n=p+1$ සලකමු. $8^{p+1} - 3^{p+1} = 8^p(5+3) - 3^{p+1}$

$$= (5m+3^p)(5+3) - 3^{p+1} \quad 5$$

$$= 8 \times 5m + 5 \times 3^p + 3^{p+1} - 3^{p+1}$$

$$= 5(8m+3^p) \quad 5 \qquad 8m+3^p \in \mathrm{Z}^+$$

එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලුම $n \in \mathrm{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5 $\boxed{25}$

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

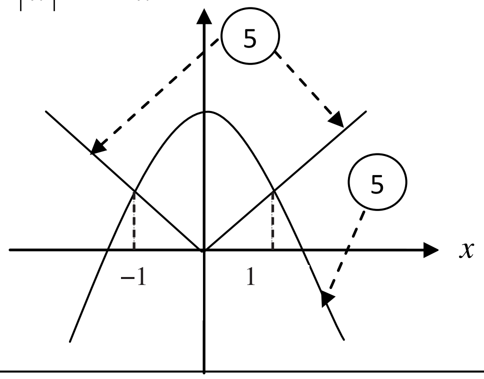
පළමුවන ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය ප්‍රශ්නයක් වුවත්, මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් පමණ ය. ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 54%කට සීමා වී තිබේ. එනම් එම අපේක්ෂකයින්ට පොදුවේ හිමිකර ගත හැකි වී ඇත්තේ ලැබිය හැකිව තිබූ උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයෙන් අඩකට ආසන්න ප්‍රමාණයක් පමණි. සමහර අයදුම්කරුවන් සපයා තිබූ පිළිතුරුවල කැපී පෙනෙන දුර්වලතාවක් වූයේ $n=p$ සඳහා උපකල්පිත ප්‍රතිඵලය නිවැරදිව ලියා දක්වා නොමැති වීමයි.

එනම්, ඇතැම් අයදුම්කරුවන් $8^P - 3^P = 5k$, ලෙස වීජයව ප්‍රකාශ කළත් “මෙහි k යනු ධන නිඛිලයකි.” යන ප්‍රකාශය ලියා දක්වා නැත. එම හේතුවෙන් අපේක්ෂකයින් ලකුණු 5ක් අහිමි කර ගෙන ඇත.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $|x| < 2 - x^2$ **අසමානතාව සපුරාලන** x **හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.**

$|x| < 2 - x^2$



$x \geq 0$ සඳහා

$x = 2 - x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ 5

$x < 0$ සඳහා

$-x = 2 - x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -1$ 5

$\therefore$ විසඳුම : $\{ x \mid -1 < x < 1 \}$ 5 $\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$x \geq 0$ සඳහා

$x < 2 - x^2$ 5

$x^2 + x - 2 < 0$

$(x-1)(x+2) < 0$

$\Rightarrow 0 \leq x < 1$ 5

$x < 0$ සඳහා

$-x < 2 - x^2$ 5

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x+1)(x-2) < 0$

$\Rightarrow -1 < x < 0$ 5

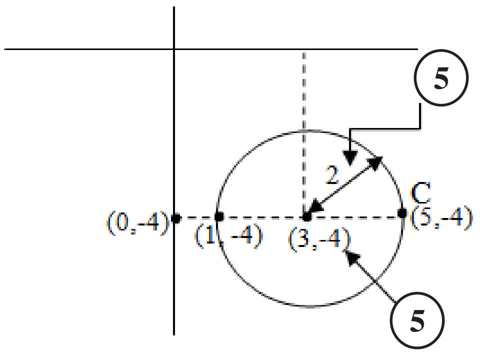
$\therefore$ විසඳුම : $\{ x \mid -1 < x < 1 \}$ 5 $\boxed{25}$

3 වන ප්‍රශ්නය

3. **ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z-3+4i|=2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. එනයින්, C මත පිහිටි z සඳහා $|z+4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න.**

C යනු කේන්ද්‍රය $(3,-4)$ වූ ද අරය 2ක් වූ ද වෘත්තයකි.

5



$$|z-3+4i|=2$$
$$|z-(3-4i)|=2$$

$$|z+4i|=|z-(-4i)|$$

∴ C මත z සඳහා $|z+4i|$ හි වැඩිතම අගය 5 යි. 5

$|z+4i|$ හි අඩුතම අගය 1 යි. 5

25

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ **හා** $n \geq 5$ **යැයි ගනිමු.** $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n$ **හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ** x^{n-10} **හි සංගුණකය** 100 **ට වඩා අඩු වේ.** n **හි අගය සොයන්න.**

$$\left(3x+\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (3x)^{n-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r 3^{n-r} 2^r x^{n-2r} \quad 5$$

$$n-10 = n-2r \Rightarrow r = 5 \quad 5$$

එම නිසා, x^{n-10} හි සංගුණකය = ${}^nC_5 3^{n-5} 2^5$

$${}^nC_5 3^{n-5} \times 32 < 100 \Rightarrow 3^{n-5} < \frac{100}{32}, \because {}^nC_5 > 1$$

5

$n \geq 5$ බව දී ඇත. $n = 5$ හෝ $n = 6$ වලංගු අගයන් වේ.

$n = 5 \qquad 5!\cdot 3^0 < \frac{100}{32} \times 5!$ වලංගු වේ.

$n = 6 \qquad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 3 < \frac{100}{32} \times 5!$ වලංගු නොවේ.

5

$\therefore \quad n = 5.$ 5

25

---

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $n \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා, $\lim\limits_{y \to a} \dfrac{y^n - a^n}{y - a} = na^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x + \sqrt{2}\right)^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\left[\overset{5}{\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})}} \cdot \overset{5}{\frac{1}{4\dfrac{\sin 4x}{4x}}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}$$

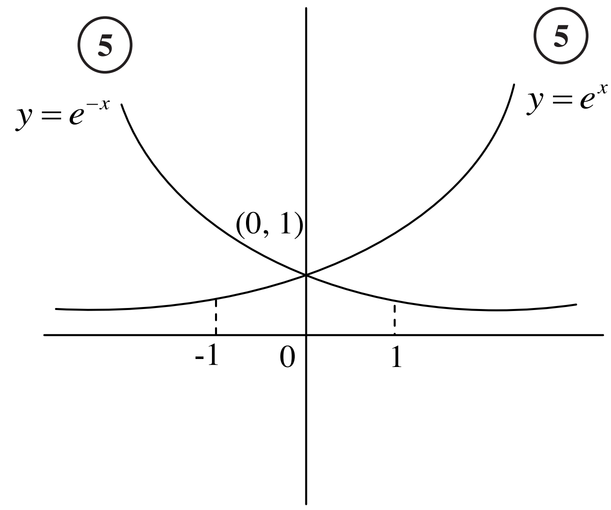
$$= \frac{1}{4}.\overset{5}{4.(\sqrt{2})^3}.\overset{5}{\frac{1}{1}}$$ (දෙන ලද ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්) 5

$$= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}.$$

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. එක ම රූප සටහනක $y=e^{x}$ හා $y=e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x-අක්ෂයෙන් ද $-1 \leq x \leq 0$ පරාසය තුළ $y=e^{x}$ වක්‍රයෙන් හා $0 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ $y=e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ බව පෙන්වන්න.



$$A=\int_{-1}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad 5$$

$$=\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} \quad 5$$

$$=1-e^{-1}-e^{-1}+1$$

$$=2-2e^{-1} \quad 5$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

25

---

7 වන ප්‍රශ්නය

7. තාත්ත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy-තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta,\ y = 4\sin\theta$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. $\dfrac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

C වක්‍රයෙහි පරාමිතික සමීකරණය : $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4\sin\theta$.

$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta$ 5

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\cos\theta}{-4\sin\theta\cos\theta} = -\dfrac{1}{\sin\theta}$ 5

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ විට, $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{2}$ අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 5

$(2, 2\sqrt{2})$ ලක්ෂ්‍යයෙහි අභිලම්බයේ සමීකරණය : 5

$y - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - 2)$ 5

$\sqrt{2}y - 4 = x - 2 \Rightarrow x - \sqrt{2}y + 2 = 0.$

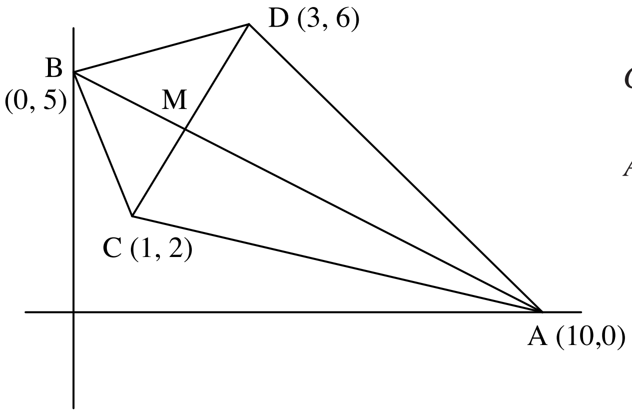
$\boxed{25}$

---

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $A(10,0)$ **හා** $B(0,5)$ **ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව** $C(1,2)$ **හා** $D(3,6)$ **ලක්ෂ්‍ය යා කරන** CD **රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.**

$ACBD$ **චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 25 ක් බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.**



CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $M(2, 4)$.

AB රේඛාවේ සමීකරණය : $\dfrac{y-5}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$ 5

$\Rightarrow x+2y-10=0$

$\because\ 2+2.4-10=0$ බැවින් M හි ඛණ්ඩාංක, ඉහත සමීකරණය සපුරාලයි. 5

තවද, CD හි අනුක්‍රමණය $= \dfrac{6-2}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2.\ \therefore\ CD \perp AB$. 5

$ACBD$ හි වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\,(\mathrm{MD}+\mathrm{MC}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB.CD} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100+25}\sqrt{2^2+4^2} = 25$

5 5

25

---

9 වන ප්‍රශ්නය

9. ***O* මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ද $y = 1$ රේඛාවේත් $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක ඔස්සේ ද යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න.**

$x^2+y^2-2x-2y+1+\lambda(y-1)=0$ වෘත්තය 5 O මූලය ඔස්සේ යන බැවින්

$1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1.$ 5

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-2x-y=0$ 5

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

කේන්ද්‍රය $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, අරය $=\frac{\sqrt{5}}{2}$

5 5

25

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ හා $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු; මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha + \beta$ හි අගය සොයන්න.

α හා β දෙකම සුළු කෝණ වේ.

$$\sin\alpha+\sin\beta=1\ , \qquad 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1 \quad 5$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}\ . \qquad 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sqrt{3} \quad 5$$

බෙදීමෙන්, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 5 $\quad 0<\alpha\ ,\beta<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}. \quad 5$$

5

25

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) x හි මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$, මෙහි α හා β තාත්ත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$,

$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$.

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ යන දෙකට ම එක ම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු ම මූල සොයන්න.

(ii) $F(x) \equiv H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික **නො වන** බව පෙන්වන්න.

(*b*) (i) $f(x) \equiv 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි γ හා δ තාත්ත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න.

(a) $F(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$

$$= x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + (2+\alpha\beta)x^2 - (\alpha+\beta)x + 1 \quad 5$$

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ එකම මූල සහිත නම්, එවිට $G(x) = 6F(x) \Rightarrow$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 6[x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + (2+\alpha\beta)x^2 - (\alpha+\beta)x + 1]$$

5

සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $\alpha + \beta = \frac{35}{6}$ 5

$2 + \alpha\beta = \frac{62}{6} \quad \Rightarrow \alpha\beta = \frac{62}{6} - 2 = \frac{50}{6}$ 5

α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය,

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \ x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{50}{6} = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow \ 6x^2 - 35x + 50 = 0$$

$\boxed{25}$

$$\Rightarrow \ (3x - 10)(2x - 5) = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow x = {}^{10}/_{3} \text{ or } x = {}^{5}/_{2}$$

$\alpha = {}^{10}/_{3}$ හා $\beta = {}^{5}/_{2}$ ලෙස ගනිමු.

5 5

$G(x)=0$ සමීකරණයේ මූල, $F(x)=0$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)(x^2-\frac{5}{2}x+1)=0$ 5

$\Leftrightarrow (3x^2-10x+3)(2x^2-5x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(3x-1)(x-2)(2x-1)=0$ 5

$\Leftrightarrow x=2,\frac{1}{2},3$ හෝ $\frac{1}{3}$

5 5

35

(ii) $H(x)\equiv F(x)$ නම්

$$x^4+x^2+1=x^4-(\alpha+\beta)x^3+(2+\alpha\beta)x^2-(\alpha+\beta)x+1$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=0 \quad 5\\ 2+\alpha\beta=1 \Rightarrow \alpha\beta=-1 \quad 5\end{array}\right\} \text{[*]}$$

[*] $\Leftrightarrow \alpha(-\alpha)=-1 \Rightarrow \alpha^2=1$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow \alpha=\pm 1\\ \text{එවිට } \beta=\mp 1\end{array}\right\} 5$$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$\therefore$ α හා β, $x^2-1=0$ සමීකරණයේ මූල වේ.

$\Rightarrow x=\pm 1.$ 5

$\alpha=1$ හා $\beta=-1$ ලෙස ගනිමු.

$H(x)=0$

$\Leftrightarrow F(x)=0 \Longrightarrow (x^2-x+1)(x^2+x+1)=0$ 5

$\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ හෝ $x^2+x+1=0$

$\Longrightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(1)<0 \qquad \Delta'=1-4(1)(1)<0$ 5

$\therefore$ $H(x)=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නොමැත.

25

(b) (i) $f(x) = 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$

$f(-1/2) = 0$ බැවින්,

$$2\left(\frac{1}{16}\right) + \gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \delta\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$\Longrightarrow \; 1 - \gamma - 4\delta + 8 = 0$

$\Longrightarrow \; \gamma + 4\delta = 9$ 5

$f(-2) = 21$ බැවින්,

$2(16) + \gamma(-8) + \delta(-2) + 1 = 21$

$\Longrightarrow \; 8\gamma + 2\delta = 12$

$\Longrightarrow \; 4\gamma + \delta = 6$ 5

$\Longrightarrow \; \gamma = 1$ හා $\delta = 2$

5 5

එම නිසා $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$

$= (2x+1), (x^3+1), \because f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

$= (2x+1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

$f(x)$ හි ඒකජ සාධක දෙක $x+1$ හා $2x+1$ වේ.

5 5

30

(ii) $(x^2 + x + 1)\, P(x) + (x^2 - 1)\, Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ 5

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$a + c = 0$............. (1) 5

$b + a + d = 0$............... (2) 5

$b + a - c = 3$................ (3) 5

$b - d = 0$................ (4) 5

(1) + (3) $\Longrightarrow 2a + b = 3$.................. (5)

(2) + (4) $\Longrightarrow 2b + a = 0$.................. (6)

(5) න් හා (6) න්, $a = 2$ හා $b = -1$

(1) න්, $c = -2$, තවද (4) න් $d = -1$

$\therefore \; P(x) = 2x - 1$ හා $Q(x) = -2x - 1$

5 5

35

වෙනත් ක්‍රමයක්

(ii) $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ 5

$x = 1 : 3(a + b) = 3 \implies a + b = 1$ 5

$x = -1 : \; -a + b = -3$ 5

$x = 0 : \; -1 - d = 0$ 5

$x = \frac{1}{2} : \; \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(-\frac{c}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$ 5

$x = 0 : \; -1 - d = 0 \implies d = -1$

$\implies c = -2$

$P(x) = 2x - 1 \qquad Q(x) = -2x - 1$

5 5

35

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) නිපුණතා සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඬුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඬුල්ල තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු, ගායිකාවන් හය දෙනකු, ගායකයින් පස් දෙනකු, නිළියන් දෙදෙනකු හා නළුවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඬුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඬුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයකු මඬුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

(ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනකු හා ගැහැනු දෙදෙනකු මඬුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

(a)

ක්‍රීඩකයින්	ක්‍රීඩිකාවන්	ගායකයන් (MS)	ගායිකාවන් (FS)	නළුවන්	නිළියන්
2	3	**5**	6	**4**	2
මඬුල්ල :	ප්‍රධානි	අනෙක් තිදෙනා			

(i) ප්‍රධානි 1+ FS 1+ MS1+ අනෙක් 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^6C_1$ 5 +

ප්‍රධානි 1+ FS 2 +MS 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_2 \times {}^5C_1$ 5 + } 5

ප්‍රධානි 1 + FS 1 + MS 2 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_2 \times {}^5C_2$ 5

$= 900 + 375 + 300 = 1575$ 5 **25**

(ii) ගැහැණු ප්‍රධානි + ගැහැණු 1 + පිරිමි 2 $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^8C_1 \times {}^9C_2$ 5 5

පිරිමි ප්‍රධානි + ගැහැණු 2 + පිරිමි 1 $\Rightarrow {}^2C_1 \times {}^8C_2 \times {}^9C_1$ 5 5 + 5

$= 864 + 504 = 1368$ 5 **30**

(iii) ප්‍රධානි ලෙස ක්‍රීඩිකාවක් + ඕනෑම අනෙක් 3 දෙනෙක් $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^{17}C_3$ 5 5

$= 2040$ 5 **15**

(b) $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 \equiv r + C$

$A(r^2 + 10r + 25) - B(r^2 + 2r + 1) \equiv r + C$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන් ;

$r^2 : \; A - B = 0$ 5

$r \; : \; 10A - 2B = 1$ 5

$r^0 : \; 25A - B = C$ 5

$A = B = \frac{1}{8}$, 5 $C = 24A = 3$ 5 එවිට $(r+5)^2 - (r+1)^2 \equiv 8(r+3)$ $\boxed{25}$

දෙන ලද U_r සලකන්න :

$$U_r = \frac{8(r+3)}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2} = \frac{(r+5)^2 - (r+1)^2}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2}$$ 5 5

$$= \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2} - \frac{1}{(r+3)^2(r+5)^2}$$

$= f(r) - f(r+2)$ මෙහි $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}$ 5 $\boxed{15}$

$U_r = f(r) - f(r+2)$

$r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

$U_1 = f(1) - f(3)$ 10

$U_2 = f(2) - f(4)$

$U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots \qquad \vdots$

$U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$U_n = f(n) - f(n+2)$ 10

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ 5

$$= \frac{1}{2^2 4^2} + \frac{1}{3^2 5^2} - \frac{1}{(n+2)^2(n+4)^2} - \frac{1}{(n+4)^2(n+6)^2}$$ 5 5

$\therefore \sum_{r}^{\infty} U_r = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}$, $n \to \infty$ විට අවසාන පද දෙක ශූන්‍යය කරා එළඹෙන බැවින්, 5 $\boxed{40}$

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) **A**, **B** හා **C** න්‍යාස තුනක්

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \text{ හා } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. **CA** ගුණිතයත් සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I}_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **එනයින්**, **DC** ගුණිතය සොයන්න.

(*b*) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta(-\pi < \theta \le \pi)$ තාත්ත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\dfrac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \dfrac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **එනයින්**, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $AC = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 \\ 0 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

5

$CA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5

$\boxed{10}$

5

(ii) $BC = \begin{pmatrix} 3a+2b & 4a+3b \\ 3c+2d & 4c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 වැනි පේළිය

$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 1 \\ 4a + 3b &= 0 \end{aligned}\right\}$ 5

$3a + 2\left(\frac{-4a}{3}\right) = 1$

$a = 3, b = -4$ 5

2 වැනි පේළිය

5

$\left.\begin{aligned} 3c + 2d &= 0 \\ 4c + 3d &= 1 \end{aligned}\right\}$ 5

$4c + 3\left(\frac{-3c}{2}\right) = 1$

$c = -2, d = 3$ 5

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 5

$\boxed{35}$

(iii) $(\lambda A+\mu B)C=\lambda AC+\mu BC=(\lambda+\mu)I_2=I_2$ 5

$\Rightarrow(\lambda+\mu-1)I_2=0\Rightarrow\lambda+\mu=1$ 5 **10**

$D=\begin{pmatrix}-3 & 8 & -6\\ 2 & -5 & 4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3 & -4 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ 5

1 වැනි තීරුව — $\mu=-1$ 5 3 වැනි තීරුව — $\lambda=2$ 5 **15**

එම නිසා $D=2A-B$ හා $DC=(2A-B)C=2AC-BC$ 5

$=2I_2-I_2=I_2$ 5 **10**

(b) $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $(-\pi<\theta\le\pi)$

$|z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1;$

z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අරය 1 හා කේන්ද්‍රය O වූ C වෘත්තය මත පිහිටයි. 5 5

$\bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta=\frac{1}{z}$ 5

$z+\bar{z}=2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 5

$z-\bar{z}=2i\sin\theta\Longrightarrow\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ 5 **25**

(i) $w=\dfrac{2z}{z^2+1}=\dfrac{2}{z+\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$ 5 $\therefore\ \mathrm{Im}(w)=0$

$t=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}=\dfrac{z-\frac{1}{z}}{z+\frac{1}{z}}=\dfrac{i\sin\theta}{\cos\theta}=i\tan\theta$; $\therefore\ \mathrm{Re}(t)=0$ 5 **10**

$w^2+t^2=\sec^2\theta+(i\tan\theta)^2\quad=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ 5 **5**

(ii) $w=2\Rightarrow\frac{1}{\cos\theta}=2$ හෝ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 5

දෙන ලද ප්‍රාන්තරය තුළ $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ 5 $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 **15**

(iii) $t=i\Rightarrow i\tan\theta=i$ 5

$\Rightarrow\tan\theta=1$

දෙන ලද ප්‍රාන්තරය තුළ $\theta=\pi/4$ හෝ $\theta=(-3\pi)/4.$ 5

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}},\ z=-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ 5 **15**

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq 0$ සඳහා $y = x \sin\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos\frac{1}{x}$ හා

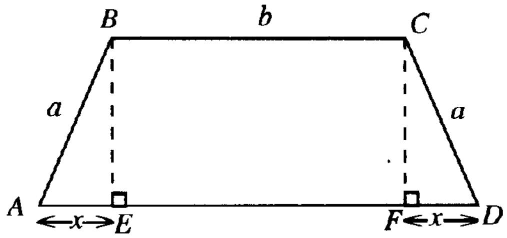
(ii) $x^4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$

බව පෙන්වන්න.

(*b*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) දී ඇති රූපයෙහි, $ABCD$ යනු, BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$, වර්ග සෙන්ටිමීටරවලින් $S(x) = (b+x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට $S(x)$ උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

(a) $y = x.\sin(1/x)\ ,\ x \neq 0$

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(1/x) + x\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\cos(1/x)$ 5 x වලින් ගුණ කිරීමෙන් 5

$\Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos(1/x)$ $\boxed{10}$

(ii) x විෂයයෙන් අවකලනයෙන් හා $\sin(1/x) = y/x$ යෙදීමෙන් :

$x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \cancel{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \cancel{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} + \sin(1/x).\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ 10

x^3 මගින් ගුණ කිරීමෙන් $\Rightarrow$ $x^4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$ 5 $\boxed{10}$

(b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2} \quad , x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2.4x - (2x^2+1).2(x-1)}{(x-1)^4} \qquad 10$$

$$= \frac{(x-1)4x - 2(2x^2+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-2\,(2x+1)}{(x-1)^3} \quad ; (x \neq 1) \qquad 5$$

$\boxed{15}$

$x = \frac{-1}{2}$ වන විට $f'(x) = 0$ වේ. 5

$\boxed{05}$

$x = 1$ වන විට $f'(x)$ නොපවතී.

$\Rightarrow x = 1$ හිදී සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් ඇත. 5

	$x < (-1/2)$	$(-1/2) < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(-)
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

10

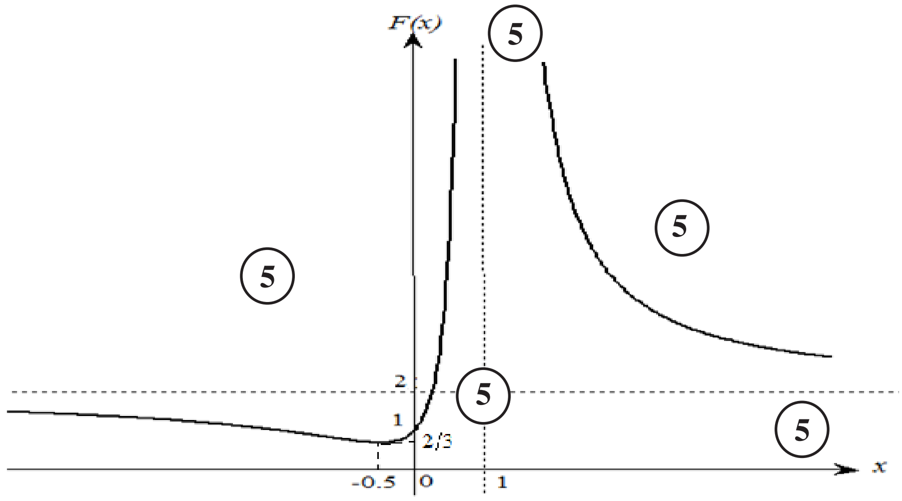
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2(-1/2)^2+1}{\left(\frac{-1}{2}-1\right)^2} = \frac{3/2}{(-3/2)^2} = 2/3 \qquad 5$$

$\therefore f(x), \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ස්ථානීය අවමයක් ගනී.

$x > 1$ හා $f'(x) < 0$

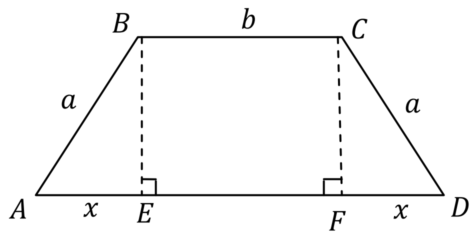
$x \to +\infty, \qquad f(x) \to 2$

$x \to -\infty, \qquad f(x) \to 2.$ 5



50

(c)



වර්ගඵලය : $S(x) = 2 \times \frac{1}{2}\, x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) + b\sqrt{a^2 - x^2} \;\; = \;\; (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ 10

10

$a = \sqrt{6}$, $b = 4$ ආදේශයෙන්,

$$S(x) = (4 + x)\sqrt{6 - x^2}$$ 5

$$\frac{dS}{dx} = (4 + x)\frac{1}{2\sqrt{6 - x^2}}\,(-2x) + \sqrt{6 - x^2}$$ 5

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-x\ (4 + x) + 6 - x^2}{2\sqrt{6 - x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2 - 4x + 6}{\sqrt{6 - x^2}} = \frac{-2(x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{6 - x^2}}$$ 5

$\frac{dS}{dx} = 0$ වන විට $x^2 + 2x - 3 = 0$ 5

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

x ධන බැවින් $x = 1$ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් දෙයි. 5

	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{6}$
$S'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)
	5	5

$\therefore x = 1$ හිදී $S(x)$ උපරිම වේ. 5

$S(x)$ හි උපරිම අගය, $S(1) = (4 + 1)\sqrt{6 - 1} = 5\sqrt{5}$ වර්ග ඒකක. 5

45

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) $\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, $\frac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(*d*) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $y = \pi - x$ යැයි ගනිමු.

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{0} f(\pi - y)(-dy) = \int_0^{\pi} f(\pi - y)dy = \int_0^{\pi} f(\pi - x)dx$$ 5 5 **10**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{4}, \quad \because [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0$$ 5 5 **10**

පළමු ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්,

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x \; dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^2(\pi - x) \; dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x \; dx - \int_0^{\pi} x \sin^2 x \; dx$$ 5

$$\therefore \quad 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x \; dx = \pi\left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \; dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \; dx\right]$$ 5 5

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} + J\right] \qquad \text{මෙහි } J = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \; dx$$ 5

$\pi - x = y$ ආදේශයෙන්, 5

$$J = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\pi - y)\;(-dy) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \; dy = \pi/4$$

5

$$\therefore \int_0^{\pi} x\sin^2 x \ \ dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\pi\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$ $\boxed{30}$

(b) ආදේශය

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ 5

$\therefore \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int te^t dt$ 5

$= \frac{1}{2}\int t\frac{d}{dt}(e^t)dt = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t dt$ 5

$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^e + C$. ආදේශය : $t = x^2$, $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$ $\boxed{30}$

5 5 5

(c) $$\frac{1}{x^3-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$1 \equiv A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$$

$x = 1$ ආදේශයෙන් $1 = 3A \implies A = \frac{1}{3}$ 5

$x = 0$ ආදේශයෙන්, $1 = A - C \implies C = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ 5

x^2 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $0 = A + B \implies B = -\frac{1}{3}$ 5 $\boxed{15}$

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{(x+2)}{x^2+x+1}dx$$

5

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx$$ 5

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$ 5

5 5

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$ 5

5

35

(d) ආදේශය : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx \implies dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ 5

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \int_0^1 \frac{dx}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3.\frac{2t}{1+t^2}}$$ 5

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)+6t}$$

5 $$= \int_0^1 \frac{2}{t^2+6t+9}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(t+3)^2} = 2\left[\frac{-1}{t+3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{6}$$

5

20

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg'+2ff'=c+c'$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

O මූලයෙහි පොදු කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය $R\,(>r)$ වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙක ම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.

C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකට ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද පොදු ස්පර්ශකයට x-අක්ෂය P හි දී ද y-අක්ෂය Q හි දී ද හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x+3y=40$ බවත්, PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $3(x^2+y^2)-30x-40y=0$ බවත් පෙන්වන්න.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, එවිට $(g-g')^2+(f-f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$ 5

5 5

$\Rightarrow\ 2gg'+2ff'=c+c'$ **15**

C වෘත්තය $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

$$(x-4)^2+(y-3)^2=3^2.$$

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(4,3)$ 5 අරය $=3$ 5

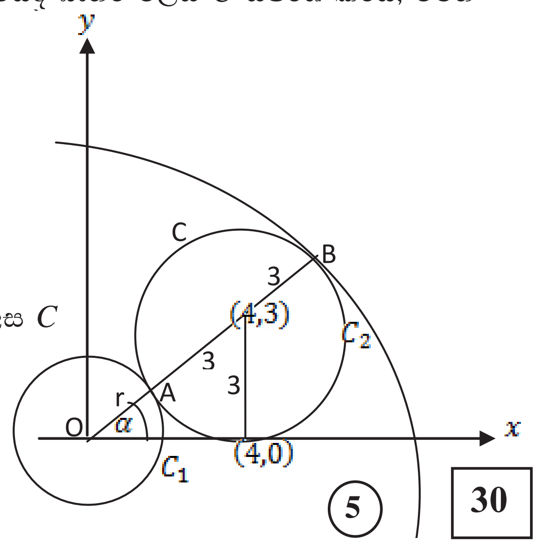
මෙම වෘත්තය $(4,0)$ හිදී $x-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි, $\because$ කේන්ද්‍රයේ $y-$ ඛණ්ඩාංකය $=3$ 5 **15**

C_1 වෘත්තය : $x^2+y^2=r^2$, $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ ලක්ෂ්‍යයේදී බාහිර ලෙස C ස්පර්ශ කරයි, මෙහි

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

$r+3=5\Rightarrow r=2$ 5

$\therefore A\equiv\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ 5



C_2 වෘත්තය : $x^2+b^2=R^2$, B ලක්ෂ්‍යයේදී අභ්‍යන්තර ලෙස C ස්පර්ශ කරයි, 5

$R=5+3=8$ 5

$\therefore\ B\equiv(8\cos\alpha,\ 8\sin\alpha)=\left(\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$ 5

5 **30**

C හා C_1 ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා $y-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය S යැයි ගනිමු.

$S:\ x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

එහි කේන්ද්‍රය ; $(-g,-f)$ හා අරය $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$\because S,\ y-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බැවින් අරය $=|g|$, 5

$g^2+f^2-c=g^2 \Rightarrow f=\pm\sqrt{c}$. 5

5

S හා C_1 ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 0+0=c-2^2 \Rightarrow c=4$. එම නිසා $f=\pm 2$ 5

S හා දෙන ලද C වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 2g(-4)+2f(-3)=4+16=20$ 5

$\Longrightarrow 4g+3f+10=0$ 5

$f=+2 \Longrightarrow \quad 4g=-10-6 \Longrightarrow g=-4$ 5

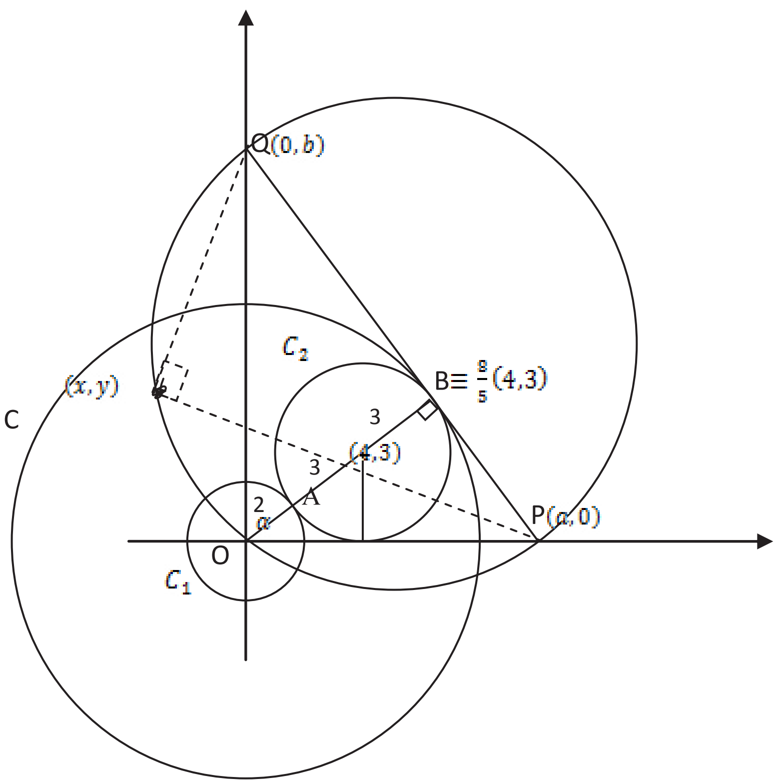
$f=-2 \Longrightarrow \quad 4g=-10+6 \Longrightarrow g=-1$ 5

S හි තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක වන්නේ,

$x^2+y^2-8x+4y+4=0$ සහ 5

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 5

$\boxed{50}$



C හා C_2 ට පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ වේ ; මෙහි $P\equiv(a,0)$ හා $Q\equiv(0,b)$ යනු එයට ඛණ්ඩාංක අක්ෂ දෙක හමුවන ලක්ෂ්‍යයයි. 10

$a = 8\sec\alpha = 8.\frac{5}{4} = 10 \Rightarrow P \equiv (10,0)$ 5

$b = 8\ cosec\ \alpha = 8.\frac{5}{3} = \frac{40}{3} \Rightarrow Q \equiv \left(0,\frac{40}{3}\right)$ 5

PQ හි සමීකරණය $\frac{x}{10}+\frac{3y}{40}=1$ 5 $\Rightarrow$ $4x+3y=40$

වෙනත් ක්‍රමයක්

C හා C_2 වෘත්තවල පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $(x^2+y^2-8x-6y+16)-(x^2+y^2-64)=0$ 10

මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Rightarrow 8x+6y-80=0 \Rightarrow 4x+3y=40.$ 5

එම නිසා $P\equiv(10,\ 0)$ 5 හා $Q\equiv\left(0,\ \frac{40}{3}\right).$ 5

25

PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තය මත $(x,\ y)$ ලක්ෂ්‍යයක් සපුරාලන අවශ්‍යතාව :

$$\left(\frac{y-0}{x-a}\right)\left(\frac{y-b}{x-0}\right)=-1$$ 5

හෝ
$$x(x-a)+y(y-b)=0$$ 5

$$\text{i.e. } x^2+y^2-ax-by=0$$

$$x^2+y^2-10x-\frac{40}{3}y=0$$ 5

හෝ
$$3(x^2+y^2)-30x-40y=0$$

40

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1+\cos x)\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\dfrac{f(x)}{1+\cos x}=\sqrt{2}\{g(x)-1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$y=g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්**, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x)=0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(*c*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}=(b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(a) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1.$

$$=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta]+\cos^2\alpha+\cos^2\beta \quad 5$$

$$=-[\overset{5}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}][\overset{5}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}]+\cos^2\alpha+\cos^2\beta \quad 5$$

$$=-\cos^2\alpha\cos^2\beta+(\overset{5}{1-\cos^2\alpha})(\overset{5}{1-\cos^2\beta})+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$$

$$=1$$

$\boxed{30}$

(b) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$

$$=2\cos^2x-1+2\sin x\cos x+2\cos x+2\sin x+1 \quad 5$$

$$=2\cos x(\cos x+1)+2\sin x(\cos x+1) \quad 5$$

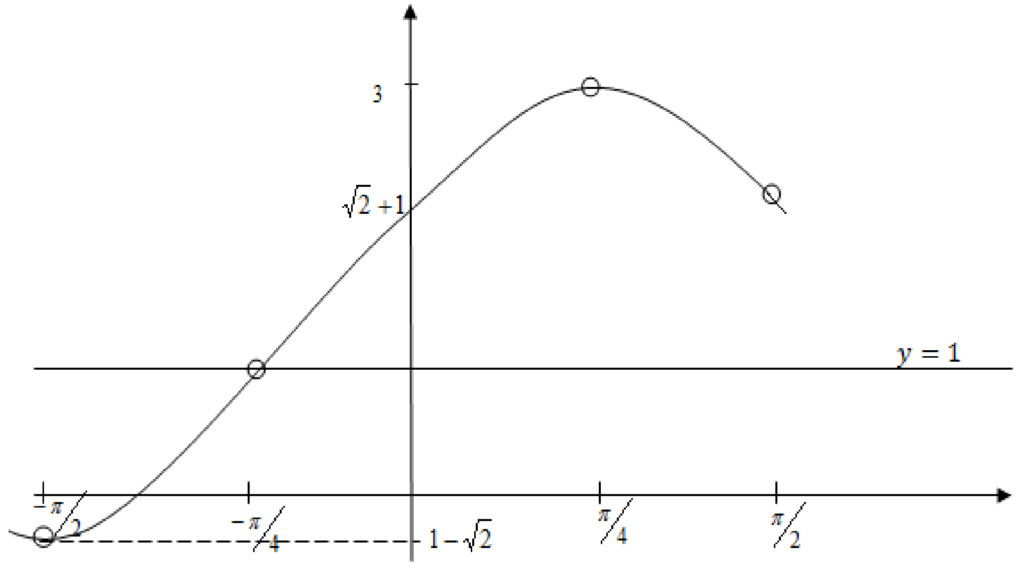
$$=2\sqrt{2}(\cos x+1)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

5 $k=2\sqrt{2},\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 5

$\boxed{25}$

$$\frac{f(x)}{1+\cos x}=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\{g(x)-1\} \quad 5$$

$$y=g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \quad 5$$



හැඩය 5 අවම සහ උපරිම 5 දෙකෙළවර 5

$x=0,\ y=\sqrt{2}+1$ 5 $\qquad$ $y=1$ 5

$f(x)=0 \Rightarrow g(x)=1$ 5 එක විසඳුමක් පමණක් පවතී. $\therefore f(x)=0$ ට එක විසඳුමක් පමණක් පවතී.

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ 5 $\boxed{45}$

5

(c) $A+B+C=\pi$ වන විට, සයින් නීතිය, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 5

5

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

5

5

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ හා $\because A+B+C=\pi$

5

$$=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}} \quad \text{———} \quad *$$

5

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ 5

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad \text{———} \quad **$$

(*) හා (**) සමීකරණ ගුණ කිරීමෙන්,

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$a(b-c)\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = (b+c)^2\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$a(b-c)\cot\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

50

<u>තවත් ක්‍රමයක්</u>

5 5

$A+B+C=\pi$ වන විට, සයින් නීතිය $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\sin A\,(\sin B - \sin C)}{(\sin B + \sin C)^2} \quad 10 \quad 5$$

$$= \frac{\sin A . 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\sin A . \sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5 \quad (\because A+B+C=\pi)$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$= \sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad 5$$

$$\Rightarrow a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

50
