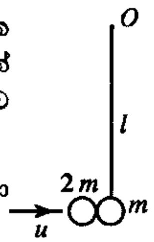
2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

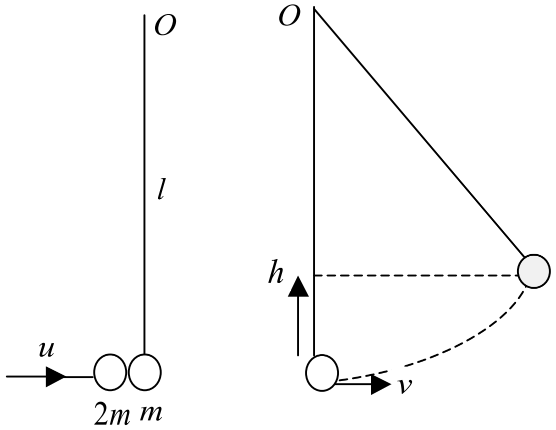
(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසන ලද දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සමතුලිතව එල්ලෙයි. ස්කන්ධය $2m$ වූ තවත් අංශුවක් u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව පළමු අංශුව සමග ගැටී එය සමග හාවේ. සංයුක්ත අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.**

$u = \sqrt{gl}$ නම්, සංයුක්ත අංශුව එහි ආරම්භක මට්ටමෙන් ඉහළට $\frac{2l}{9}$ උපරිම උසක් කරා ළඟා වන බව පෙන්වන්න.





සංයුක්ත අංශුව චලනය වීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු

පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(M\underline{v})$ යොදමු.

$\rightarrow \quad 0 = 3mv - 2m \times u$ (5)

$\Rightarrow v = \dfrac{2u}{3}.$ (5)

ශක්ති සංස්ථිති නියමය මගින්, $(3mg)h = \dfrac{1}{2}(3m)v^2$ වේ. ම෹හි h යනු අවශ්‍ය උස වේ. (10)

$\therefore \; h = \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{4u^2}{9(2g)} = \dfrac{4gl}{18g} = \dfrac{2l}{9}.$ (5)

$\boxed{25}$

---

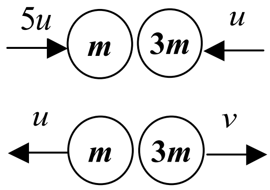
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 95% ක් පමණි. අංශු දෙකක චලිතය සඳහා ආවේගය සමානයි ගම්‍යතා පරිවර්තනය සහ ශක්ති සංස්ථිති නියමය නිවැරදිව යෙදීම මෙයින් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 56% ක් පමණි. මෙය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් ද, විසඳිය හැකි වේ. ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමේදී ස්කන්ධය 3m වෙනුවට m යෙදීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. තවද නියත ත්වරණයෙන් චලිතය සඳහා වූ චලිත සමීකරණය යොදා ගෙන ගැටලුව විසඳීමට උත්සාහ කර තිබුණි.

ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය හා ශක්ති සංස්ථිති නියමය භාවිතයෙන් සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව හුරු කර වීමෙන් මෙම දුර්වලතා මගහරවා ගත හැකිය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $5u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු ව, P හා Q **එකිනෙකින් ඉවතට** පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් චලනය වේ. u ඇසුරෙන් v සොයා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $\underline{I} = \Delta(M\underline{v})$ යොදමු.

$\longrightarrow \quad 0 = (3mv - mu) - (5mu - 3mu)$ 5

$\Rightarrow 3mv = 3mu$ 5

$\Rightarrow v = u$. -----------(1)

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය මගින් 10

$v + u = e(5u + u)$

$(1) \Rightarrow 2u = 6eu$

$\therefore \quad e = \frac{1}{3}.$ 5

$\boxed{25}$

---

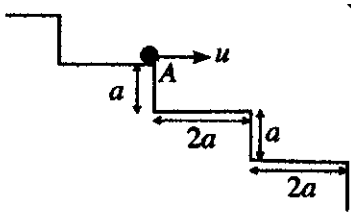
2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

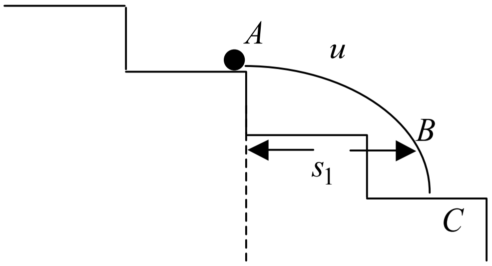
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 96% ක් පමණි. ප්‍රත්‍යාස්ථ වස්තු දෙකක් අතර ගැටුමක් විස්තර කිරීම සඳහා අවශ්‍ය සමීකරණ නිවැරදිව යෙදීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 65% ක් පමණි.

ප්‍රත්‍යාස්ථ ගැටුමක් සඳහා ආවේගය සමානයි ගම්‍යතා පරිවර්තනය හෝ ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය හා නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය නිවැරදිව යෙදීමේදී නිවැරදි දිශාව පිළිබඳ අවබෝධය මදි කම නිසා ගැටලුවට සාර්ථකව පිළිතුරු ලිවීමට නොහැකි වී තිබුණි. ඒ සඳහා සිසුන්ව සරල අභ්‍යාසවල නිරත කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ***P* අංශුවක්, අචල පඩි පෙළක පඩියක දාරයෙහි වූ *A* ලක්ෂ්‍යයක සිට එම දාරයට ලම්බව $u = \frac{3}{2}\sqrt{ga}$ මගින් දෙනු ලබන *u* ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ, ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. එක් එක් පඩියේ උස *a* හා දිග *2a* වේ (රූපය බලන්න). *P* අංශුව *A* ට පහළින් පළමු පඩියේ නොවදින බවත් *A* ට පහළින් දෙවන පඩියේ *A* සිට *3a* තිරස් දුරකින් වදින බවත් පෙන්වන්න.**





P හි චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදමු.

↓ *A* සිට *B* දක්වා: $a = \frac{1}{2}g t_1^2$, මෙහි t_1 යනු *A* ට පහළින් වූ පළමු පඩිය වෙත ළඟා වීමට ගනු ලැබූ කාලය වේ. 5

$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$.

t_1 කාලයකදී චලනය වූ තිරස් දුර s_1 යැයි ගනිමු.

→ *A* සිට *B* දක්වා : $s_1 = u \times t_1 = \frac{3}{2}\sqrt{g}a \times \sqrt{\frac{2a}{g}} = \frac{3}{\sqrt{2}}a > 2a$. 5

5

එබැවින් *P* අංශුව *A* ට පහළින් වූ පළමු පඩියේ නොවදී.

A සිට *C* දක්වා ගනු ලැබූ කාලය $t_2 = \sqrt{\frac{2(2a)}{g}}$ වේ. 5

→ $s = ut_2 = \frac{3}{2}\sqrt{ga} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = 3a$.

5

$\boxed{25}$

---

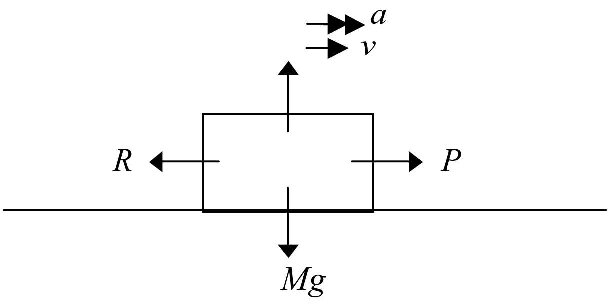
3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 85% ක් පමණි. ගුරුත්වය යටතේ අංශුවක චලිතය පිළිබඳ මූලධර්ම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 32% ක් පමණි. ගැටලුව නිවැරදිව අවබෝධ කර නොගැනීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවය මඟ හරවා ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. R N නියත විශාලත්වයකින් යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව ඍජු සමතලා පාරක් දිගේ ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් චලනය වේ. කාරය v m s^{-1} වේගයෙන් චලනය වන මොහොතක දී එහි ත්වරණය a m s^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී එහි එන්ජිමේ ජවය $(R+Ma)v$ W බව පෙන්වන්න.

කාරය ඊළඟට එම R N නියත විශාලත්වයෙන් ම යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම ජවයෙන් ම ක්‍රියා කරමින් තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ ඍජු පාරක ඉහළට v_1 m s^{-1} නියත වේගයක් සහිත ව චලනය වේ. $v_1 = \dfrac{(R+Ma)v}{R+Mg\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.



ප්‍රකර්ශන බලය PN යැයි ගනිමු.

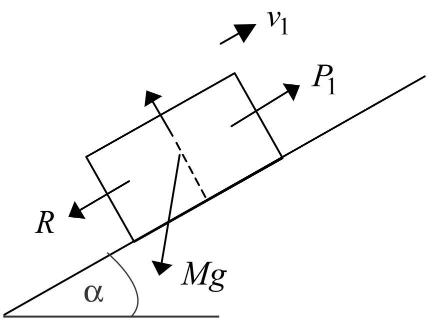
$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ යොදමු.

$P - R = Ma$ -------------- (1) 5

H W යනු එන්ජිමේ ජවය යැයි ගනිමු. 5

එවිට $H = P \times v$

$= (R + Ma)v$ (1) න් 5



$\underline{F} = m\underline{a}$: ↗α

$P_1 - R - Mg\sin\alpha = 0$ ---------- (2) 5

තවද $H = P_1 \times v_1$

$\therefore\ v_1 = \dfrac{H}{P_1} = \dfrac{(R+Ma)v}{(R+Mg\sin\alpha)}$. (2) න්

5

25

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණි. P = FV යන සම්මත සමීකරණවල යෙදීම පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 75% ක් පමණි.

ඒකක අතර සම්බන්ධය නිවැරදිව යොදා නොගැනීම නිසා දී ඇති පිළිතුරට ලඟා වීමට නොහැකි වී ඇත. මෙවැනි සරල ගැටලු විසඳීමේදී ඒකක පරිවර්තනය සහ බල ලකුණු කිරීම් පිළිබඳ විශේෂ අවධානය යොමු කරමින් ගැටලු විසඳීමට යොමු කළ යුතුය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{i} + (1-\alpha)\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$,

(ii) α ඇසුරෙන් $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ හා $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

සොයන්න.

a හා **c** අතර කෝණය **b** හා **c** අතර කෝණයට සමාන නම්, $\alpha = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(i)

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

5 දෙකම සඳහා

5

(ii) $\underline{a}\cdot\underline{c} = 3\alpha + 4(1-\alpha) = 4-\alpha$

5

$\underline{b}\cdot\underline{c} = 4\alpha + 3(1-\alpha) = 3+\alpha$

$\underline{a}$ හා $\underline{c}$ අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු. එවිට $\underline{a}\cdot\underline{c} = |\underline{a}||\underline{c}|\cos\theta$ හා $\underline{b}\cdot\underline{c} = |\underline{b}||\underline{c}|\cos\theta$.

$|\underline{a}| = |\underline{b}|$, බැවින් $\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{c}$. 5

$\therefore 4-\alpha = 3+\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. 5

$\boxed{25}$

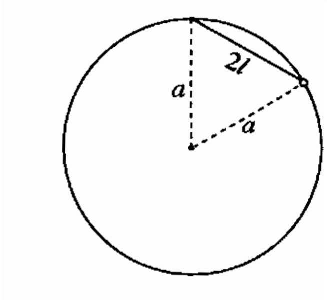
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

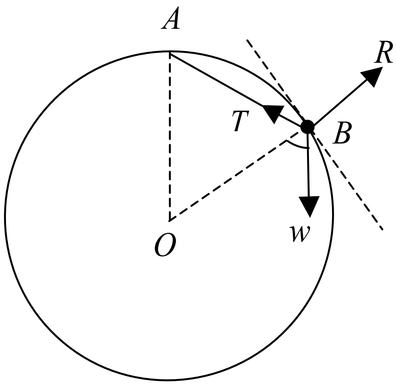
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 52% ක් පමණි. **i** හා **j** ඒකක දෛශික ඇසුරෙන් දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය ප්‍රකාශ කිරීම නිවැරදිව යොදා නොගැනීමෙන් බොහෝ අපේක්ෂකයන් අවසාන පිළිතුර කරා ළඟා වී නොතිබිණි.

අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ විවිධ ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මග හරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

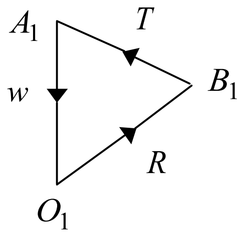
6. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, සිරස් තලයක සවි කර ඇති අරය $a\ (>\sqrt{2}l)$ වූ සිහින්, සුමට දෘඪ වෘත්තාකාර කම්බියක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත. කම්බිය දිගේ චලනය වීමට නිදහස ඇති බර w වූ කුඩා සුමට පබළුවක් තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව, පබළුව සමතුලිතතාවයේ පවතී. ජබළුව මත ක්‍රියා කරන බල ලකුණු කර, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{2wl}{a}$ බව පෙන්වන්න.





5

බල ත්‍රිකෝණය



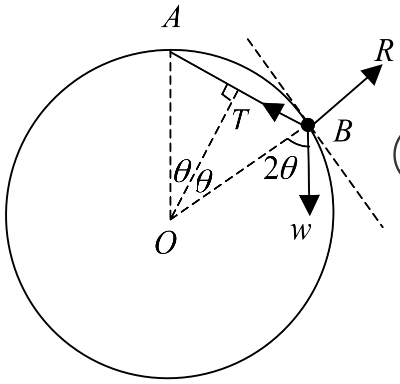
10

$$\frac{T}{AB} = \frac{w}{OA} \Rightarrow T = \frac{2wl}{a}$$ 5

5

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය 1



5

ලාමී ප්‍රමේයය මගින්, $\dfrac{T}{\sin(\pi-2\theta)} = \dfrac{w}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}$. 10

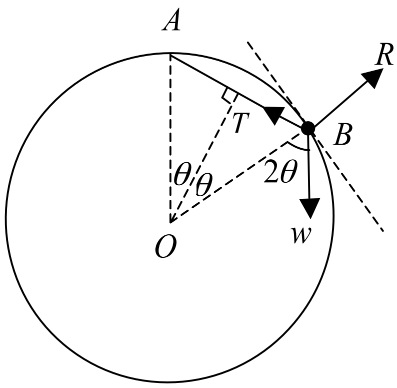
$$\therefore \quad T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$

$$= 2w\sin\theta = \frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

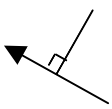
5

25

විකල්ප ක්‍රමය 2



5



OB ට ලම්බ දිශාවට විභේදනය කරමු.

$$T\cos\theta = w\sin 2\theta$$ 10

$$T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$ 5

$$= 2w\sin\theta$$

$$= \frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$ 5

25

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 79% ක් පමණි. අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක සමතුලිතතාව යටතේ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර පහසුතාව 23% ක් පමණි. බල ලකුණු කිරීම පිළිබඳ දුර්වලතාවයක් පැවතීම හා බල ත්‍රිකෝණය භාවිත කිරීමට උත්සාහ කර ඇති අපේක්ෂකයන් බල ත්‍රිකෝණය එක් වරම හඳුනා නොගැනීම හේතුවෙන් සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි විය. බොහෝ අපේක්ෂකයින් සරල ක්‍රම අනුගමනය නොකර බල විභේදන ක්‍රමය භාවිත කිරීම නිසා ගැටලුව සංකීර්ණ තත්ත්වයට පත්කර ගෙන ඇත. නිවැරදි ලෙස බල සටහන් ඇඳ ගැනීම සහ ඒවාට අනුරූප සරල ක්‍රම (බල ත්‍රිකෝණ ක්‍රමය, ලාමිගේ ප්‍රමේයය) මගින් ගැටලු විසඳීමට හුරුකරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = p$, $P(B) = \frac{p}{2}$ හා $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$ වේ; මෙහි $p > 0$ වේ. p ඇසුරෙන් $P(A \cap B)$ සොයන්න.
A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි නම්, $p = \frac{5}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

A හා B සිද්ධීන් සඳහා, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. 5

$$=> P(A \cup B) = \frac{3p}{2} - P(A \cap B). \text{ ------------- (1)}$$ 5

$P(A \cup B)) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$. බව දී ඇත. ------------ (2)

(1) හා $(2) \Rightarrow \frac{3p}{2} - 2P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5p}{12}.$$ 5

A හා B ස්වායත්ත නම්, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$. 5

$$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{5}{6}. \quad (\because p > 0)$$ 5

$\boxed{25}$

$$\Rightarrow \frac{5p}{12} = p \cdot \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \; p = \frac{5}{6}. \quad (\because p > 0) \quad 5$$

25

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 90% ක් පමණි. සරල සිද්ධිවල සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික යෙදීම් මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 61% ක් පමණි. සිද්ධි දෙකක ස්වායත්තතාව පිළිබඳ අවබෝධය නොමැති කමින් මෙම ගැටලුවට සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයයන් නිවැරදිව යොදා ගැනීමෙන් සරල ගැටලු විසඳීමට හුරු කර වීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. මල්ලක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින් ම සමාන වූ, සුදු බෝල 6 ක් හා කළු බෝල n අඩංගු වේ. එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව බෝල දෙකක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{15}$ වේ. n හි අගය සොයන්න.

පළමු බෝලය සුදුවීමේ සම්භාවිතාවය $= \frac{6}{n+6}.$

පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාවය $= \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)}$ 10

$$\therefore \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} = \frac{4}{15} \quad 5$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 23n + 60 = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow (n-4)(2n-15) = 0$$

$\Rightarrow n = 4$. ($\because n$ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.) 5

25

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86% ක් පමණි. මෙයද සම්භාවිතාව පිළිබඳ සරල ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 34% ක් පමණි සමහර අපේක්ෂකයින්ට පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණු අතර එය ලබාගත් අපේක්ෂකයන්ට ද සමීකරණය සුළු කර විසඳුම් ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. 11 ට අඩු ප්‍රභින්න නිඛිල තුනක මධ්‍යන්‍යය 7 වේ. තවත් නිඛිල දෙකක් ගත් විට නිඛිල පහේම මධ්‍යන්‍යය 5 වේ. තව ද මෙම නිඛිල පහේ එක ම මාතය 3 වේ. නිඛිල පහ සොයන්න.

x, y හා z යනු මධ්‍යන්‍යය 7 වූ 11 ට අඩු ප්‍රභින්න පූර්ණ සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

එවිට $\dfrac{x+y+z}{3} = 7.$ 5

$\Rightarrow x+y+z = 21$----------------(1)

x, y හා z ප්‍රභින්න හා එකම මාතය 3 බැවින් අමතරව ගත් පූර්ණ සංඛ්‍යා දෙකෙන් අඩු තරමින් එකක්වත් 3 විය යුතුය. අනෙක t යැයි ගනිමු.

පූර්ණ සංඛ්‍යා පහෙහි මධ්‍යන්‍යය 5 බැවින් $\dfrac{x+y+z+t+3}{5} = 5$ වේ. 5

$\Rightarrow 21+3+t = 25$ 5

$\Rightarrow \quad t = 1$.

ඒ නයින්, පූර්ණ සංඛ්‍යා $x, y, z, 3, 1$ වේ. එකම මාතය 3 ද, x, y හා z ප්‍රභින්න ද බැවින් ඒවායින් හරියටම එකක් 3 විය යුතුය. $z = 3$ යැයි ගනිමු.

නැවත (1) $\Rightarrow x + y = 18$. ------------- (2) 5

x හා y යනු 11ට අඩු පූර්ණ සංඛ්‍යා බැවින් (2) න් ($x = 8$ හා $y = 10$) හෝ ($x = 10$ හා $y = 8$) වේ. ඒ නයින්, සංඛ්‍යා පහ 1, 3, 3, 8 හා 10 වේ.

5 $\boxed{25}$

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 80% ක් පමණි. අසමූහිත දත්ත සඳහා මධ්‍යන්‍යය සහ මාතය යන මිනුම් පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 36% ක් පමණි.

දී ඇති දත්ත සම්බන්ධ කර ගෙන සංඛ්‍යා පහෙහි මධ්‍යන්‍යය ලිවීමට නොහැකි වීම නිසාත් සංඛ්‍යා හඳුනා ගැනීමට නිවැරදි තර්ක ගොඩ නැගීමට නොහැකි වීම නිසාත් මෙම ගැටලුවට ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි.

මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය යන කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිණුම් සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවය මඟහරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. 1, 2, 3, 4 හා 5 ලෙස අංක කළ සමාන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ පහකින් සමන්විත, භ්‍රමණය වන වෘත්තාකාර ඉලක්ක පුවරුවක් වෙතට ඊතලයක් විදිනු ලැබේ. එක් එක් ඛණ්ඩයෙහි ඊතලය වදින වාර ගණන පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යාත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ; මෙහි p හා q නියත වේ.

අංකය	1	2	3	4	5
සංඛ්‍යාතය	1	p	q	5	2

ඉහත දත්තවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් 3 හා $\frac{6}{5}$ බව දී ඇත්නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

මධ්‍යන්‍යය $\mu = 3 \Rightarrow \dfrac{1+2p+3q+20+10}{p+q+8} = 3$ 5

$\Rightarrow 2p+3q+31 \quad = 3p+3q+24$

$\Rightarrow p = 7.$ 5

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$$ 5

විචලතාවය $= \dfrac{6}{5} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{1\cdot1^2 + 7\cdot2^2 + q\cdot3^2 + 5\cdot4^2 + 2\cdot5^2}{q+15} - 3^2$ 5

$\Rightarrow 51(q+15) = 5(1+28+9q+80+50)$ 5

$\Rightarrow \quad q = 5.$

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \quad 5$$

විචලතාවය $= \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1(1-3)^2 + 7(2-3)^2 + q(3-3)^2 + 5(4-3)^2 + 2(5-3)^2}{1+7+q+5+2}$ 5

$\Rightarrow \quad \frac{6}{5} = \frac{4+7+5+8}{15+q}$

$\Rightarrow q = 5.$ 5

15

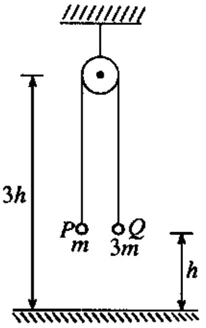
10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්‍ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 80% ක් පමණි. දී ඇති අසමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක නොදන්නා සංඛ්‍යාත නිමානය කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 21% ක් පමණි. සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති හා සම්බන්ධ සියලු නිරීක්ෂණ සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දැක්වීමට අපහසු වීම නිසා අපේක්‍ෂකයන්ට සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී ඇත. “විචලතාව” පිළිබඳ අර්ථ දැක්වීම නිසි ලෙස භාවිතා කර නොතිබුණි. දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ හෝ $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$ යන සූත්‍ර භාවිත වන පරිදි විවිධ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව හුරුකරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමකට $3h$ උසක් ඉහළින් සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී අංශු දෙක ගෙබිමට h උසකින් තන්තුව තදව ඇතිව අල්වා තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. (යාබද රූපය බලන්න.) P හා Q හි චලිතයන්ට වෙන වෙන ම නිව්ටන් දෙවෙනි නියමය යෙදීමෙන්, එක් එක් අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය $\frac{g}{2}$ බව පෙන්වන්න.

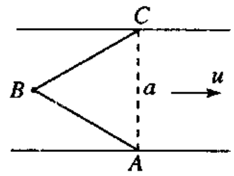


t_0 කාලයකට පසු ව Q අංශුව ගෙබිම සමග ගැටී ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පැමිණ, තවත් t_1 කාලයක් නිශ්චලතාවයේ තිබී උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරයි. Q අංශුව උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරන තෙක් P හා Q අංශු දෙකෙහි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් වෙන වෙන ම අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, $t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ බව පෙන්වා, g හා h ඇසුරෙන් t_1 සොයන්න.

P අංශුව ගෙබිමේ සිට $\frac{5h}{2}$ උපරිම උසකට ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

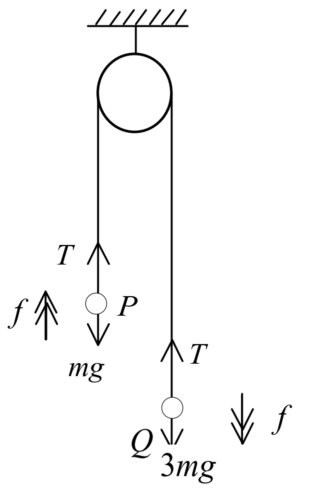
(*b*) පළල a වූ සෘජු ගඟක් ඒකාකාර u වේගයකින් ගලයි. ගඟ ගලන දිශාවට AC රේඛාව ලම්බ වන පරිදි A හා C ලක්ෂ්‍ය ගඟේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරු දෙකෙහි පිහිටා ඇත. තව ද ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි AC ගෙන් උඩු ගං අතට B අචල බෝයාවක් ගඟ මැද සවි කර ඇත. (යාබද රූපය බලන්න.) ජලයට සාපේක්ෂව $v\ (> u)$ වේගයෙන් චලනය වන බෝට්ටුවක් A සිට ආරම්භ කර B වෙත ළඟා වන තෙක් චලනය වේ. ඊළඟට එය B සිට C දක්වා චලනය වේ. A සිට B දක්වාත් B සිට C දක්වාත් බෝට්ටුවේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



A සිට B දක්වා චලිතයේ දී බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right)$ බව පෙන්වා, B සිට C දක්වා චලිතයේ දී එහි වේගය සොයන්න.

ඒ නයින්, AB හා BC පෙත් සඳහා බෝට්ටුව ගන්නා මුළු කාලය $\frac{a\sqrt{4v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$ බව පෙන්වන්න.

(a)



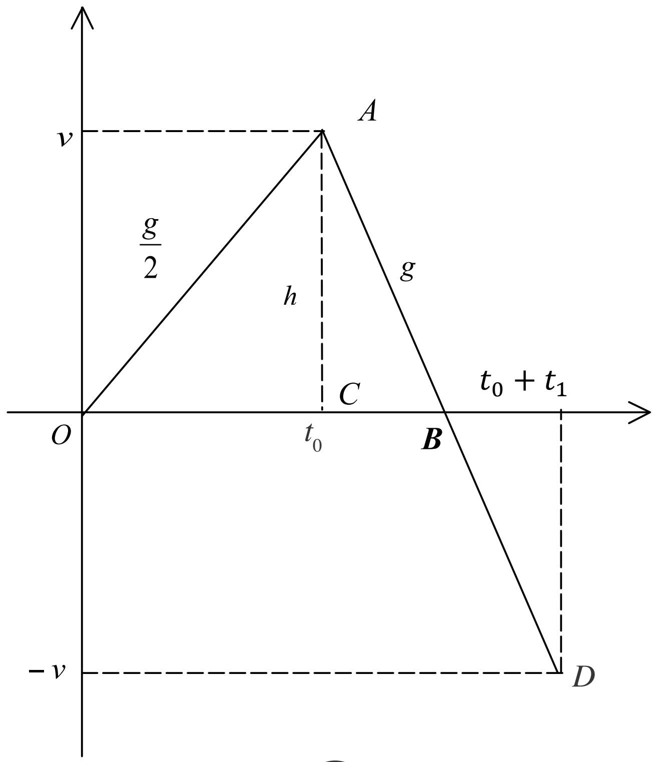
$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

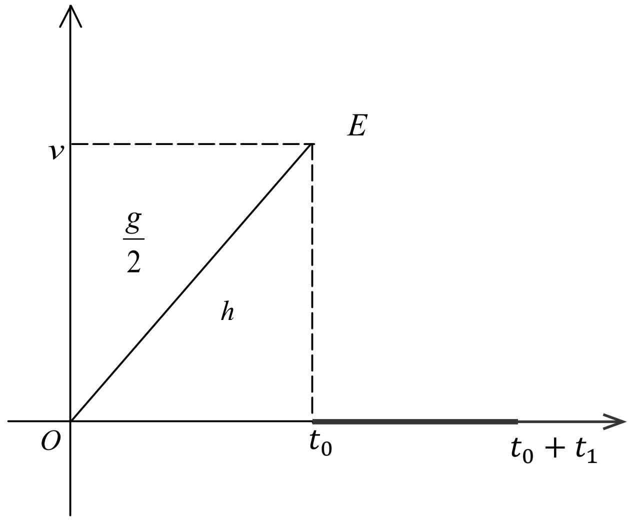
$Q(3m)$ සඳහා $\downarrow\ 3mg - T = 3mf$ 5

$P(m)$ සඳහා $\uparrow\ T - mg = mf$ 5

$2mg = 4mf$

$\Rightarrow f = \frac{g}{2}.$ 5





15 10

P අංශුව Q අංශුව

$\boxed{40}$

OA හෝ OE යට වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot v = h$ ---------- (1) 5

OA හෝ OE හි අනුක්‍රමණය $= \frac{v}{t_0} = \frac{g}{2}$ ----------- (2) 5

$$(1) \text{ හා } (2) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot \frac{g t_0}{2} = h$$

$$\Rightarrow t_0^2 = \frac{4h}{g}$$

$$\Rightarrow t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

$\boxed{15}$

$$(2) \Rightarrow v = \frac{g}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$$ 5

ප්‍රස්තාරය මගින්

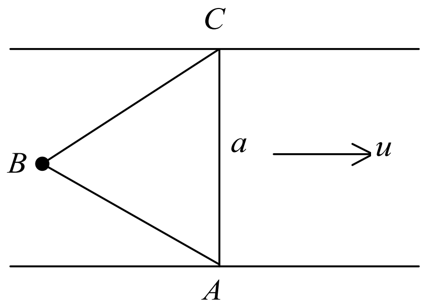
P හි ගුරුත්වය යටතේ පමණක් චලිතයට ගන්නා කාලය $= \frac{2v}{g}$

$$\therefore \quad t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$ 5 $\boxed{10}$

P ළඟාවන උපරිම උස $= \frac{1}{2}\cdot v\cdot\frac{t}{2} = \frac{1}{2}h$ 5

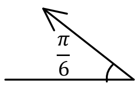
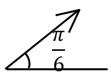
ගෙබිම මට්ටමේ සිට උස $= h + h + \frac{h}{2} = \frac{5h}{2}$ 5 $\boxed{10}$

(*b*)



$\underline{V}(B,W) = v$

$\underline{V}(W,E) = u \;\rightarrow$

$\underline{V}(B,E) =$  AB සඳහා  BC සඳහා 5

$\underline{V}(B,E) = \underline{V}(B,W) + \underline{V}(W,E)$

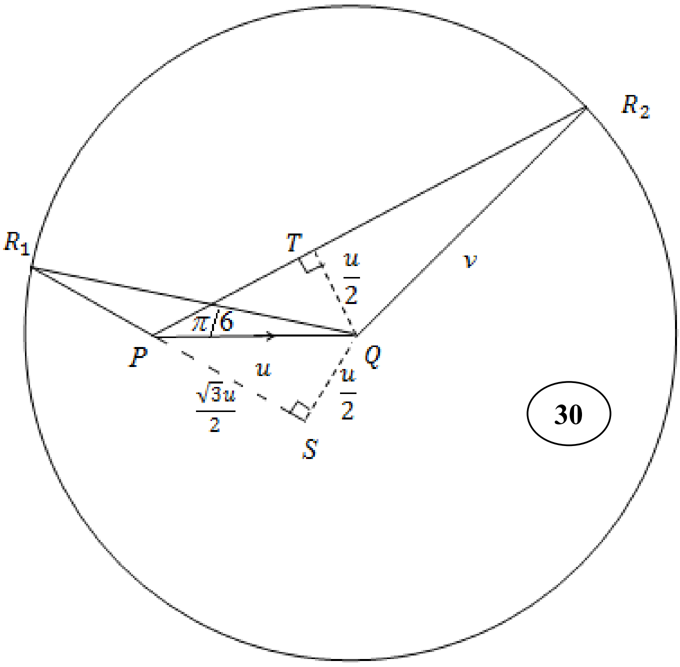
$= \underline{V}(W,E) + \underline{V}(B,W)$

5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i}$, $i = 1,2$, සඳහා: මෙහි $AB//PR_1$ හා $BC//PR_2$.

5 5 $\boxed{20}$



30

$\underline{AB}$ සඳහා : $\Delta\ PQR_1$

$$R_1S = \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$$ 5

$$PR_1 = R_1S - PS$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right).$$ 5

$\underline{BC}$ සඳහා : $\Delta\ PQR_2$

$$PR_2 = PT + TR_2$$

$$= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$$ 5

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} + \sqrt{3}u\right)$$ 5

$$PR_1.PR_2 = \frac{1}{4}\left(4v^2 - u^2 - 3u^2\right)$$

$$PR_1 + PR_2 = \sqrt{4v^2 - u^2}$$

$$PR_1 \cdot PR_2 = v^2 - u^2$$

මුළු කාලය $= \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_2}$ 5

$$= a\frac{(PR_1 + PR_2)}{PR_1.\ PR_2}$$

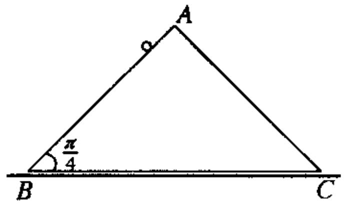
$$= a\frac{\sqrt{4v^2 - u^2}}{(v^2 - u^2)}.$$

25

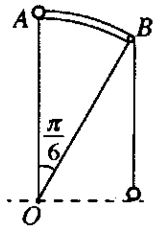
---

12 වන ප්‍රශ්නය

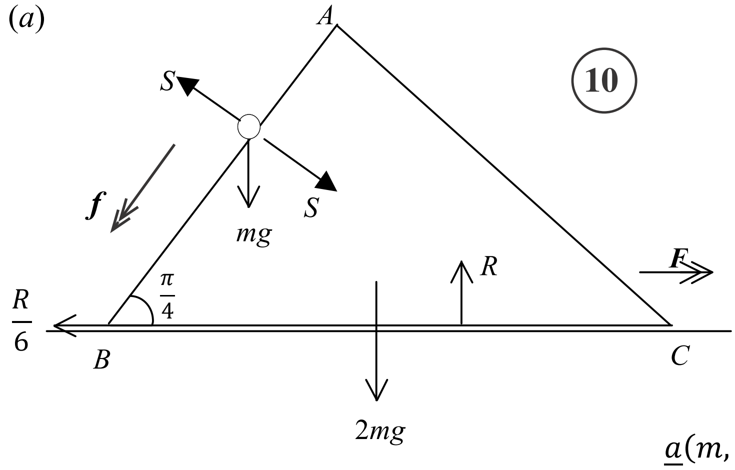
12. (*a*) රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය $2m$ වූ ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ සිරස් හරස්කඩකි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ වේ. BC අයත් මුහුණත රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. AB අයත් මුහුණත සුමට වේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB මත අල්වා තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය $\overrightarrow{BC}$ හි දිශාවට චලනය වන බවත් ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයෙහි විශාලත්වය $\frac{R}{6}$ වන බවත් දී ඇත; මෙහි R යනු ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයයි. m හා g ඇසුරෙන්, R නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් වන සමීකරණ ලබා ගන්න.



(*b*) රූපයේ දැක්වෙන OAB යනු OA සිරස් ව ඇති, O කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන අරය a වූ වෘත්ත ඛණ්ඩයකි. එය, ස්වකීය අක්ෂය තිරස් ව සවි කර ඇති සුමට සිලින්ඩරාකාර ඛණ්ඩයක අක්ෂයට ලම්බ හරස්කඩකි. B හි සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $3m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවකට ඈඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි අල්වා ඇති අතර Q අංශුව O හි තිරස් මට්ටමේ නිදහසේ එල්ලෙයි. තන්තුව තදව ඇතිව, මෙම පිහිටීමෙන්, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. OP උඩු අත් සිරස සමග $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදන විට $2a\dot{\theta}^2 = 3g(1-\cos\theta) + g\theta$ බව හා තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{4}mg(1-\sin\theta)$ බව පෙන්වා, P අංශුව මත අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



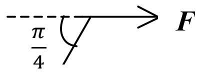
(*a*)



$\underline{a}(2m, E) = \boldsymbol{F}$

$\underline{a}(m, 2m) = \boldsymbol{f}$

$\underline{a}(m, E) = \underline{a}(m, 2m) + \underline{a}(2m, E)$

$=$ 

10

$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු

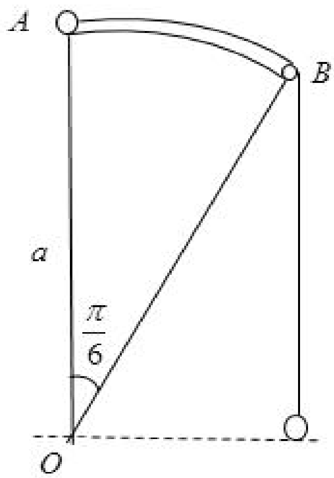
(i) P අංශුව සඳහා $\swarrow$ $mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\left(f - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ 15

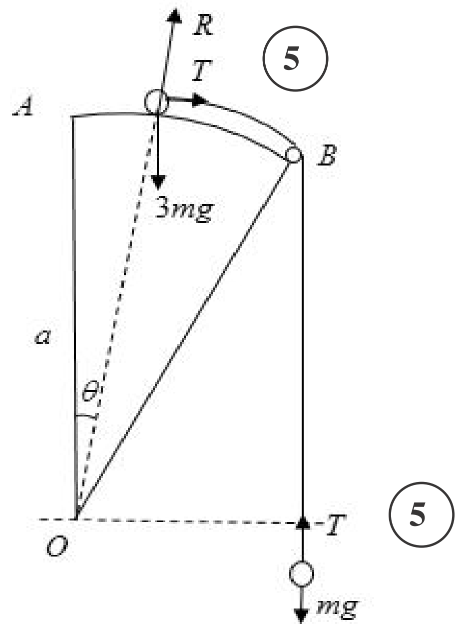
(ii) පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$ $\frac{-R}{6} = 2mF + m\left(F - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)$ 15

(iii) පද්ධතිය සඳහා $\uparrow$ $R - 3mg = -m\frac{f}{\sqrt{2}}$ 10

$\boxed{60}$

(*b*)





යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිතියෙන්

$$3mga = 3mga\cos\theta - mga\theta + \frac{1}{2}(3m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(a\dot{\theta})^2$$ 25

(වි.ශ. = 10, චා.ශ. = 10, සමීකරණය = 05)

$$2a\dot{\theta}^2 = 3g(1-\cos\theta) + g\theta$$ 5

$\boxed{40}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

P සඳහා ↘ $T + 3mg\sin\theta = 3mf$ -------- (1) 15

Q සඳහා ↓ $mg - T \quad = mf$ -------- (2) 10

By (1) හා (2) න්

$$3mg - 3T = T + 3mg\sin\theta$$

$$4T = 3mg(1 - \sin\theta)$$ 05

$$T = \frac{3mg}{4}(1 - \sin\theta)$$

$\boxed{30}$

$\underline{F} = m\underline{a}$, P සඳහා යෙදීමෙන්

↙ $3mg\cos\theta - R = 3ma\dot{\theta}^2$ 10

$R = 3mg\cos\theta - \frac{3m}{2}\{3g(1 - \cos\theta) + g\theta\}$ 10

$$= \frac{3mg}{2}(2\cos\theta - 3 + 3\cos\theta - \theta)$$

$$= \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - \theta - 3)$$

$\boxed{20}$

සටහන :

$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ සඳහා පෘෂ්ඨයෙන් P ඉවත් නොවේ.

$$R|_{\theta=0} = 3mg > 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{3mg}{2}(-5\sin\theta - 1) < 0 \; for \; 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$R|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{3mg}{2}(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 3) > 0$$

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ගැට ගසා ඇත. P අංශුව, O හි නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යය පසු කර යන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න; මෙහි $OA = a$ වේ.

තන්තුවේ දිග $x(\geq a)$ යන්න $\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

$X = x - \frac{5a}{4}$ ලෙස ගෙන, ඉහත සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\omega(> 0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right)$ බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි විස්තාරය වන c සොයන්න.

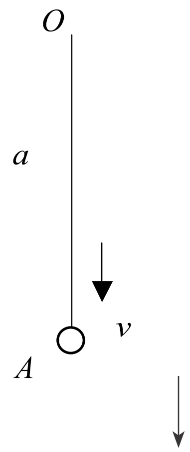
P අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය L යැයි ගනිමු. A සිට L දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලැබූ කාලය $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව L හි තිබෙන මොහොතේ දී ස්කන්ධය λm $(1 \leq \lambda < 3)$ වූ තවත් අංශුවක් සීරුවෙන් P ට ඇඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය $(1 + \lambda)\, m$ වූ සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව, $(3 - \lambda)\frac{a}{4}$ විස්තාරය සහිත පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

ගුරුත්වය යටතේ පමණක් P හි චලිතය සඳහා

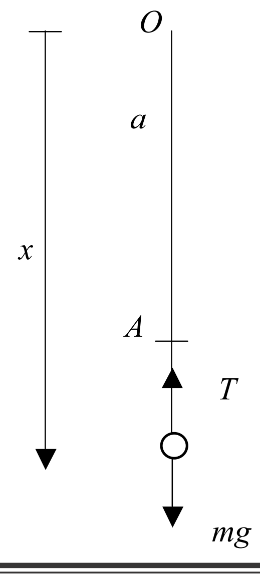
O සිට A දක්වා



$$v^2 = 2ga \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ag}. \qquad 5$$

තන්තුවේ ආතතිය : $T = \frac{4mg(x-a)}{a}, \; x \geq a$ 5

$F = ma \; : \; -T + mg = m\ddot{x}$ 5



T ඉවත් කිරීමෙන් $-4mg\frac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$ 5

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a}.\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0 \text{---------------------------} (1) \qquad 5$$

$X = x - \frac{5a}{4} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ හා $\ddot{X} = \ddot{x}$. 5

එවිට (1) න් $\ddot{X} + \frac{4g}{a} X = 0.$

එමගින් $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$; මෙහි $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$. $(\because \omega > 0)$

5 5

40

$\Rightarrow \dot{X}^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$------------------------- (2)

$x = a$ විට, $\dot{x} = \sqrt{2ga}$ නිසා $\Rightarrow \dot{X}^2 = 2ga$, $X = -\frac{a}{4}$

5 5

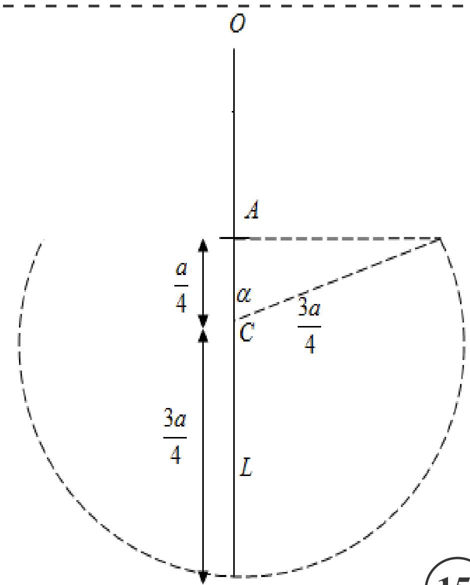
එවිට (2) $\Rightarrow 2ga = \frac{4g}{a}\left[c^2 - \left(\frac{-a}{4}\right)^2\right]$ 5

$\Rightarrow a^2 = 2c^2 - \frac{a^2}{8} \Rightarrow c^2 = \frac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$ $(\because c > 0)$ 5

කේන්ද්‍රය දෙනු ලබන්නේ $X = 0$; $x = \frac{5a}{4}$. 5

25



15

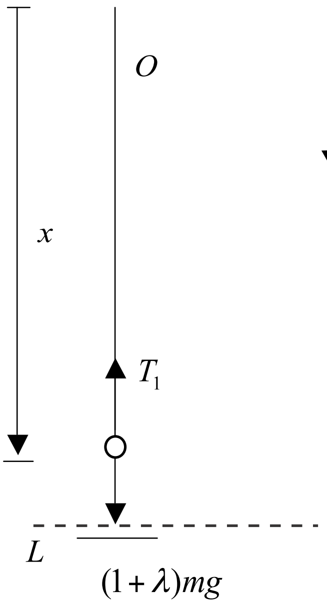
$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a.$ 5

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ 5

A සිට L දක්වා ගනු ලැබූ කාලය $= \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ 5

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$ 5

35



$$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$$

↓ සංයුක්ත අංශුව සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$: $(1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$ 10

$$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x}$$ 5

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0$$

5

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{(x-a) - (1+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$$ 5

25

කේන්ද්‍රය C_1: $x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$ 5

$$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4}$$ 5

$$= (3-\lambda)\frac{a}{4}$$ 5

නව විස්තාරය $c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4}$ (>0) $\because \lambda < 3.$

සම්පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතය $\Leftrightarrow$

$$AC_1 \geq c_1$$ 5

$$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$$

$$5 + \lambda - 4 \geq 3 - \lambda$$

$$\lambda \geq 1$$ 5

25

$X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ යැයි ගනිමු. මෙහි A හා B නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$ 5

$t = 0$ හා $x = a$ වන විට $X = -\dfrac{a}{4}$ හා $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}.$

5 5

$\therefore \quad -\dfrac{a}{4} = A,\; V = B\omega \Rightarrow B = \dfrac{V}{\omega}$

5 5

විසඳුම : $X = -\dfrac{a}{4}\cos\omega t + \dfrac{V}{\omega}\sin\omega t.$

25

අවකලනයෙන් : $\dot{X} = \dfrac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t.$ 5

පහත්ම ලක්ෂ්‍යය වන L ට ළඟාවන්නේ : $\dot{X} = 0$' විට දීය. 5

පළමු වරට $t = t_1$, වන්නේ යැයි කියමු.

එවිට : $\tan\omega t_1 = -\dfrac{4V}{a\omega}$ 5

$\omega t_1 = \pi - \alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{4V}{a\omega}$; මෙහි $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 5

සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය $x = \dfrac{5a}{4}$ හෝ $AC = \dfrac{a}{4}$ වේ. 5

$$\frac{a}{4} = c\cos\alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$$

$$= c.\frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16\times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c$$ 5

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$$

තවද, ඉහතින්

$$\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$$ 5

35

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ; මෙහි O, A හා B **ඒක රේඛීය නො වේ**. C යනු $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද යැයි ගනිමු. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{AD}$ ප්‍රකාශ කර, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ බව පෙන්වන්න.
P හා Q යනු පිළිවෙළින්, AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{OQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක $AB = 2$ m හා $AD = 1$ m යැයි ද $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ යැයි ද ගනිමු. තව ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන $5, 5, 2, 4$ හා 3 වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC, DA හා BE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවන්ට ක්‍රියා කරයි. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න.
සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව B සිට $\frac{3}{2}$ m දුරක දී දික්කරන ලද AB ට හමුවන බවත් පෙන්වන්න.
දැන් C හරහා ක්‍රියා කරන අමතර බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ දිගේ වන පරිදි ය. අමතර බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(*a*)

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{b}{3}$ 5 හා $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{b-a}{2}$ 5

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

$= -\underline{a} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$

$= \frac{3}{2}\left(-\underline{a} + \frac{b}{3}\right)$ ----------- (1) 5

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\underline{a} + \frac{b}{3}$ ----------- (2) 5

(1) හා (2) මගින් $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ 5

25

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ 5

$= -\lambda(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} + \underline{c}$ 5

$= (\lambda - 1)\underline{a} - \lambda\underline{b} + \dfrac{\underline{b}}{3}$

$= (\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}$ ------- (3) 5

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ}$ 5

$= -\overrightarrow{OC} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OD}$

$= -\dfrac{\underline{b}}{3} + (1 - \lambda)\dfrac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$ 5

$= \dfrac{1}{2}\left[(\lambda - 1)\underline{a} - \dfrac{3}{2}\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b}\right]$

$= \frac{1}{2}\left((\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}\right)$ ---------(4)

5

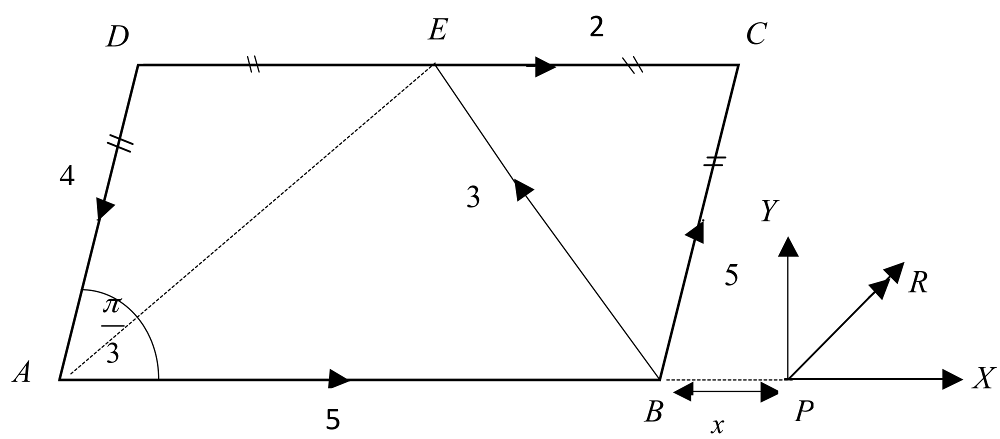
(3) හා (4) මගින් $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ 5

35

---

10 දී ඇති බල ලකුණු කිරීම සඳහා

(*b*)

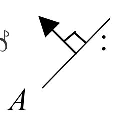


10

දිශාවට විභේදනයෙන් $\overrightarrow{AE}$ ට // $-4\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 4\sqrt{3}\text{N}$ 5

AE ට ලම්බව විභේදනයෙන්



: $-4\sin\frac{\pi}{6} + 5\sin\frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6}$ 10

$= 3 - 2 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2} - 1$

$= 0$ 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $R = 4\sqrt{3}\text{N}$ හා $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර වේ. 10

40

විකල්ප විසඳීම

AB දිගේ $\rightarrow X = 5 + \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = 6N$ (10)

AB ලම්භව $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(5+3) - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}N$ (10)

$\frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ (5)

සම්ප්‍රයුක්යේ විශාලත්වය $R = 2\sqrt{3}\sqrt{3+1} = 4\sqrt{3}N,$ (5)

එහි ක්‍රියා රේඛාව AB සමඟ සාදන කෝණය $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \therefore$ එය AE ට සමාන්තර වේ. (5)

(5)

$\boxed{40}$

සම්ප්‍රයුක්තයට දික් කරන ලද AB හමුවන ලක්ෂ්‍යය P යැයි ගනිමු.

B සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$Yx = 4\times 2\sin\frac{\pi}{3} - 2\times 1\sin\frac{\pi}{3}$$ (10)

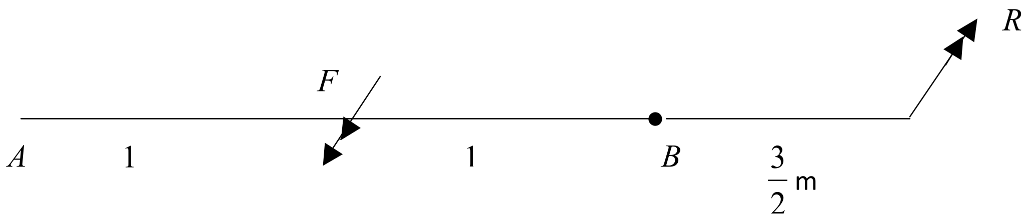
$2\sqrt{3}x = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3}{2}$ m. (5)

$\boxed{15}$

එවිට BP, $x = \frac{3}{2}$ m.

අතිරේක බලය $\overrightarrow{EA}$ ට සමාන්තර වේ. (5)



A $R\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\sin 30^\circ = F.1\sin 30^\circ$ (15)

$4\sqrt{3}\times\frac{7}{2} = F$

$F = 14\sqrt{3}N.$ (5)

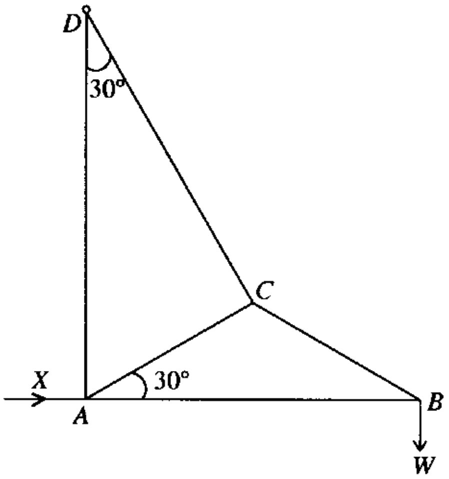
$\boxed{25}$

---

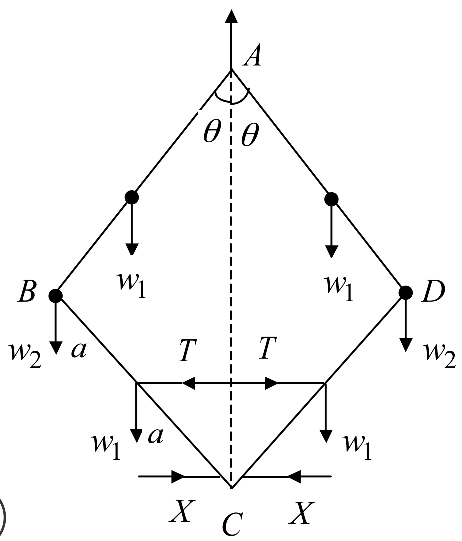
15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) එක එකක බර w_1 වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක්, $ABCD$ රොම්බසයක් සෑදෙන පරිදි, ඒවායේ අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. $B\hat{A}D = 2\theta$ වන පරිදි BC හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් යා කර ඇත. B හා D එක් එක් සන්ධිය සමාන w_2 භාර දරයි. පද්ධතිය, A සන්ධියෙන් සමමිතික ලෙස එල්ලෙමින්, සැහැල්ලු දණ්ඩ තිරස් ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතියි. සැහැල්ලු දණ්ඩෙහි තෙරපුම $2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන්, අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, AC හා AD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. $AC = CB$ හා $B\hat{A}C = 30^\circ = A\hat{D}C$ බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල D හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. B සන්ධියේ දී W බරක් එල්ලා AB තිරස් ව ද AD සිරස් ව ද ඇතිව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හි දී ක්‍රියා කරන විශාලත්වය X වූ තිරස් බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා A සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. **ඒ නයින්**, X හි අගය හා සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.



(*a*)



10

සමමිතියට 5

එක් එක් බර දණ්ඩේ දිග 2a යැයි ගනිමු.

B ↶ BC සඳහා : $X \times 2a\cos\theta - w_1 \times a\sin\theta - T \times a\cos\theta = 0$. 10

$\Rightarrow 2X - T = w_1 \tan\theta$ ---------- (1) 5

A ↶ AB හා BC සඳහා

$X \times 4a\cos\theta + 2w_1 \times a\sin\theta + w_2 \times 2a\sin\theta - T \times 3a\cos\theta = 0$. 20

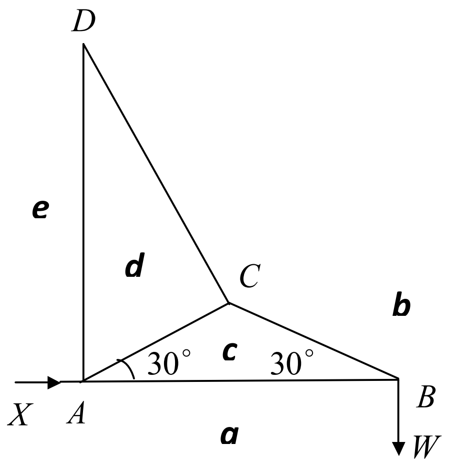
$\Rightarrow 4X - 3T = -2(w_1 + w_2)\tan\theta$ ---------- (2) 5

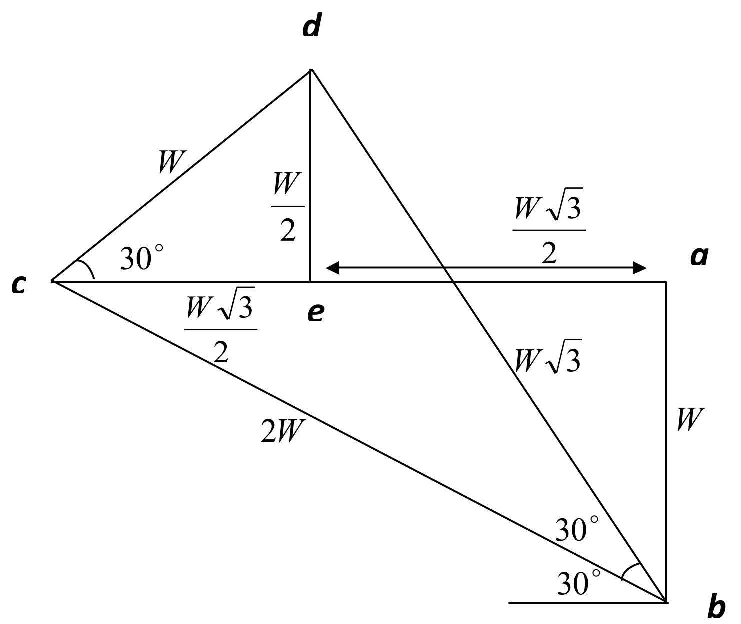
$$(1) \times 2 - (2) \Rightarrow T = 2w_1 \tan\theta + (2w_1 + w_2)\tan\theta$$
$$= (4w_1 + 2w_2)\tan\theta$$
$$= 2(2w_1 + w_2)\tan\theta$$ 10

65

(*b*)

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතතිය/ තෙරපුම	
BC(***bc***)	$2W$	ආතතිය	10
AB(***ca***)	$\sqrt{3}W$	තෙරපුම	10
CD(***bd***)	$\sqrt{3}W$	ආතතිය	10
AC(***dc***)	W	ආතතිය	10
AD(***de***)	$\frac{W}{2}$	තෙරපුම	10
X(***ea***) $= \frac{W\sqrt{3}}{2}$			5





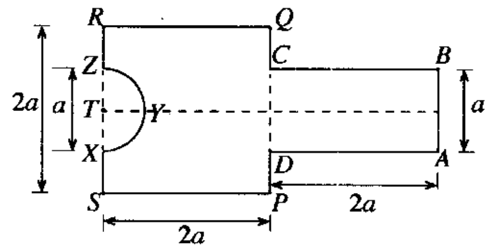
30

85

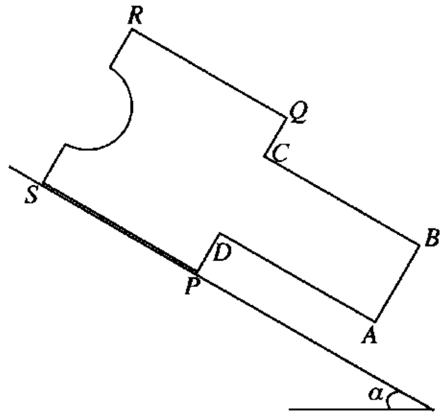
---

16 වන ප්‍රශ්නය

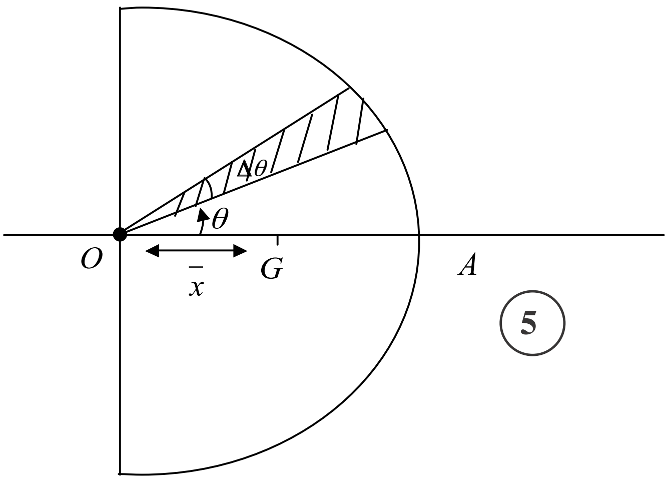
16. අරය r හා O කේන්ද්‍රය වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\dfrac{4r}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ඒකාකාර තල ආස්තරයක් සාදා ඇත්තේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් $PQRS$ සමචතුරස්‍රයකට DC හා PQ ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සම්පාත වෙමින් එක ම රේඛාවේ පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කර, RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන T හි කේන්ද්‍රය ඇති අරය $\dfrac{a}{2}$ වන XYZ අර්ධ වෘත්තාකාර පෙදෙසක් ඉවත් කිරීමෙනි. $AB = a$ හා $AD = PQ = 2a$ බව දී ඇත. L ආස්තරයෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත, RS සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = \dfrac{238}{3(48-\pi)}$ වේ.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ආස්තරය තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්වකීය තලය සිරස් ව ද P ලක්ෂ්‍යය S ට පහළින් පිහිටන පරිදි PS දාරය උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\tan\alpha < (2-k)$ හා $\mu \geq \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර සර්ෂණ සංගුණකයයි.



5

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට OA මත පිහිටයි. 5

ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ යැයි ගනිමු.

$$\Delta m = \frac{1}{2} r^2 (\Delta\theta)\sigma.$$

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \frac{2}{3} r \cos\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} r^2 \sigma}$$ 5 10 5

$$= \frac{2r}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

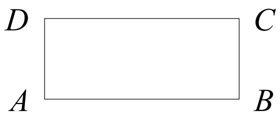
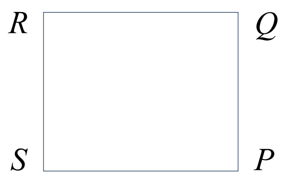
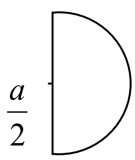
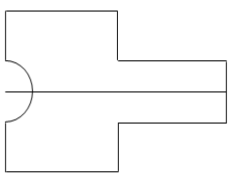
$$= \frac{2r}{3\pi} \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$ 5

$$= \frac{2r}{3\pi} \left[2 \sin\frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{4r}{3\pi}.$$ 5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $= \dfrac{4r}{3\pi}$

40

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ***RS*** සිට දුර $(\rightarrow)$	
	$2a^2\sigma$	$3a$	10
	$4a^2\sigma$	a	10
	$\frac{1}{2} \cdot \pi \times \frac{a^2}{4} \sigma$	$\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{3\pi}$	10
	$\left(6 - \frac{\pi}{8}\right) a^2 \sigma$	$\bar{x}_1$	5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ථ දැක්වීමෙන්

$$\frac{a^2\sigma}{8}(48-\pi)\bar{x}_1 = 2a^2\sigma \times 3a + 4a^2\sigma \times a - \frac{\pi a^2}{8}\sigma \times \frac{2a}{3\pi}$$ 10

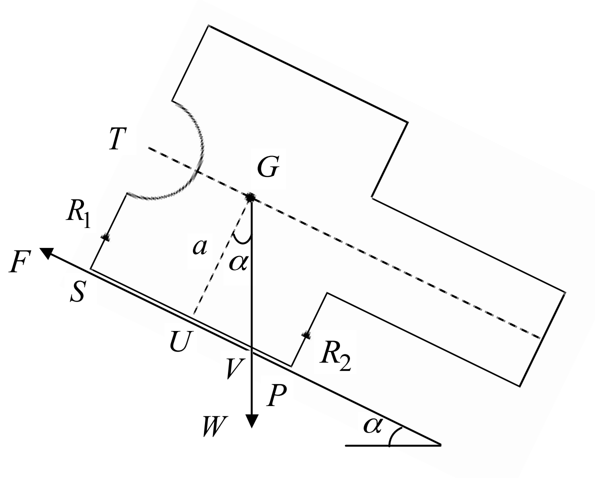
$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \left(10-\frac{1}{2}\right)a$$

$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \frac{119}{12}a$$

$$\therefore \bar{x}_1 = \frac{238}{3(48-\pi)}a$$ 5

$$= ka.$$

50



10

තලය සමඟ PS ස්පර්ශව තිබීම සඳහා $UV < UP$ විය යුතුය. 10

එනම් $a\tan\alpha < 2a - ka$.

$$\Rightarrow \tan\alpha < (2-k).(k < 2.)$$ 10

$$R_1 + R_2 = w\cos\alpha$$ 10

$$F = w\sin\alpha$$ 5

L නොලිස්සන බැවින් $\mu \geq \dfrac{F}{R_1+R_2}$. 10

$$\Rightarrow \mu \geq \tan\alpha.$$ 5

60

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) නොනැඹුරු ඝනකාකාර A දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $1, 2, 3, 3, 4, 5$ පෙන්වයි. A දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි එකතුව 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

මුහුණත් මත වූ සංඛ්‍යා හැරුණු විට, අන් සෑම අයුරකින් ම A ට සර්වසම තවත් B දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත $2, 2, 3, 4, 4, 5$ පෙන්වයි. B දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි එකතුව 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දැන්, A හා B දාදු කැට දෙක පෙට්ටියකට දමනු ලැබේ. එක් දාදු කැටයක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි එකතුව 6 බව දී ඇති විට, පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් දාදු කැටය, A දාදු කැටය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ යන සංඛ්‍යා n වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_1 හා σ_1 ද, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ යන සංඛ්‍යා m වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_2 හා σ_2 ද වේ. මෙම සියලු ම $n+m$ සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_3 හා σ_3 යැයි ගනිමු.

$\mu_3 = \dfrac{n\mu_1 + m\mu_2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

$d_1 = \mu_3 - \mu_1$ ලෙස ගනිමු. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_3\right)^2 = n\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$d_2 = \mu_3 - \mu_2$ ලෙස ගැනීමෙන්, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - \mu_3\right)^2$ සඳහා එබඳු ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$\sigma_3^2 = \dfrac{\left(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2\right) + \left(nd_1^2 + md_2^2\right)}{n+m}$ බව අපෝහනය කරන්න.

අලුත් පොතක් ප්‍රකාශයට පත් කිරීමෙන් පසු පළමු දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 2.3 ක් ද විචලතාව 0.8 ක් ද විය. ඊළඟ දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 1.7 ක් ද විචලතාව 0.5 ක් ද විය. පළමු දින 200 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

A දාදු කැටය එක්වරක් විසි කළ විට n සංඛ්‍යාව ලකුණු කළ මුහුණත ලැබීමේ සම්භාවිතාව $P(n)$ පහත දැක්වේ.

n	1	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$i = 1, 2$ සඳහා i වන විසි කිරීමේදී ලැබෙන සංඛ්‍යාව X_i යැයි ගනිමු.

එවිට $P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1$ හා $X_2 = 5) + P(X_1 = 5$ හා $X_2 = 1)$

$+ P(X_1 = 2$ හා $X_2 = 4) + P(X_1 = 4$ හා $X_2 = 2)$

$+ P(X_1 = 3$ හා $X_2 = 3)$.

$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 15

$= \frac{2}{9}$. 5

20

B දාදු කැටය සඳහා X_i වෙනුවට Y_i යොදමු.

n	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

එවිට $P(Y_1 + Y_2 = 6) = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ 15

$=\frac{1}{4}.$ 5

20

බේයි ප්‍රමේයයෙන්

$$P(A|\text{sum}=6)=\frac{P(\text{sum}=6|A)P(A)}{P(\text{sum}=6|A).P(A)+P(\text{sum}=6|B).P(B)}$$ 10

$$=\frac{\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{8}{17}.$$ 5 10 5

30

(b) $\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\mu_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j}{m}.$ 5

දැන් $\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_i}{m+n}$ 5

$= \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{m+n}.$ 5

15

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_3)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1+\mu_1-\mu_3)^2$ 5

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 - d_1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ (x_i - \mu_1)^2 + 2d_1 (x_i - \mu_1) + d_1{}^2 \right\} \quad 5$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2 - 2d_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) + = \sum_{i=1}^{n} d_1{}^2 \quad 5$$

$$= n\sigma_1^2 + n d_1^2 \left(\because \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) = 0 \;\; 5 \quad \text{සහ} \;\; 5 \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2}{n} \right)$$

$$= n(\sigma_1^2 + d_1^2). \quad 5$$

30

එලෙසම $\sum_{j=1}^{m} (y_j - \mu_3)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2)$, මෙහි $d_2 = \mu_3 - \mu_2$. 5

05

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 + \sum_{j=1}^{m} (y_i - \mu_3)^2}{m+n} \quad 5$$

$$= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m+n}$$

$$= \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + n(d_1^2 + md_2^2)}{m+n}. \quad 5$$

10

පළමු දින 100 සඳහා

$n = 100$, $\mu_1 = 2.3$, $\sigma_1 = 0.8$

දෙවන දින 100 සඳහා

$m = 100$, $\mu_2 = 1.7$, $\sigma_2 = 0.5$ 5

ඉහතින් $\mu_3 = \frac{230 + 170}{200} = 2.$ 5

$d_1 = -0.3,$ හා $d_2 = 0.3$ වේ.

$$\sigma_3^2 = \frac{100}{200}[0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2] \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}[0.64 + 0.25 + 0.09 \times 2]$$

$$= \frac{1.07}{2} = 0.535$$

$\sigma_3 = \sqrt{0.535}$. 5

$\boxed{20}$