2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ විට, ව.පැ. $= \sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 2$ හා

ද.පැ. $= \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2$. 5

එනයින් $n = 1$, විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

යම් $p \in \mathbb{Z}^+$ ලෙස ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ යැයි ගනිමු. (අභ්‍යුහන උපකල්පනය) 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (p+1)\left[(p+1)+1\right]$ 5

$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$ (අභ්‍යුහන කල්පිතය මගින්)

$= \frac{(p+1)}{3}(p+2)(p+3)$. 5

එනයින්, $n = p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n = p+1$ සඳහා ද එය සත්‍ය වේ. $n = 1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව කලින් පෙන්වා ඇත. එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$\boxed{25}$

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

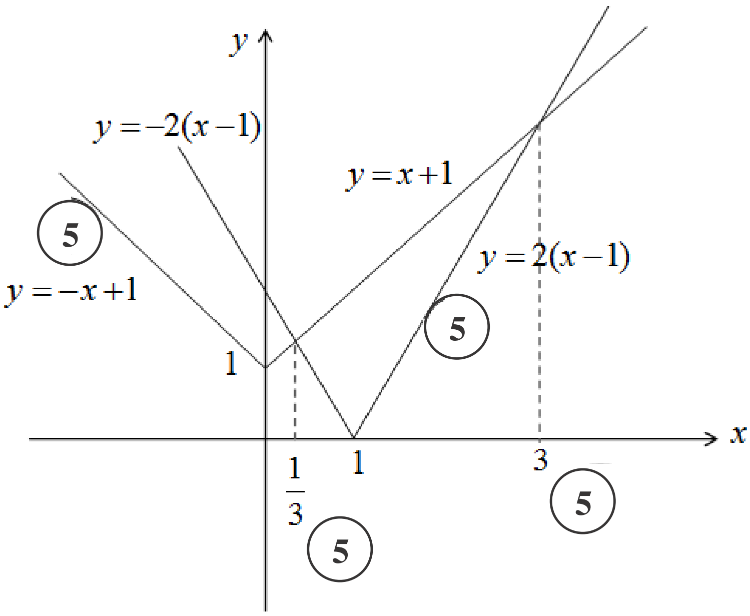
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් පමණි. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය නිසියාකාරව යෙදීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 53% ක් පමණි.

$n = p$; $p \in \mathbb{Z}^+$ ට උපකල්පනයේදී $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ ලෙස ලිවිය යුතු වුවත් $\sum_{r=1}^{p} p(p+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ වැනි වැරදි සහිතව ලියා තිබීම නිසා අපේක්ෂකයන් වැඩිදෙනකුට එම පියවර සඳහා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. එලෙසම $n = p+1$ සඳහා වූ සාධනය ද නිවැරදි නොවීය.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ පියවර තහවුරු වන පරිදි අභ්‍යාසවලට යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගැනීමට සිසුන් උනන්දු කළ යුතුය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. එක ම රූප සටහනක $y = |x| + 1$ හා $y = 2|x - 1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. **ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ,** $|x| + 1 > 2|x - 1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



රූපය මගින්, $|x|+1>2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3.$ 5

25

විකල්ප ක්‍රමය I

(i) අවස්ථාව, $\boxed{x \ge 1}$ $x+1>2(x-1) \Leftrightarrow x<3$ 5

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ $1 \le x < 3$ තෘප්ත කරන x අගයන් ය.

(ii) අවස්ථාව, $\boxed{0<x<1}$ $x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}.$ 5

එබැවින්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් වන්නේ $\frac{1}{3}<x<1$ තෘප්ත කරන x අගයන් ය.

(iii) අවස්ථාව, $\boxed{x \le 0}$ $-x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>1$

මෙම විසංවාදය මගින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින්, විසඳුම් කුලකය $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}<x<3\right\}$ වේ. 5

15

විකල්ප ක්‍රමය II

$|x|+1 > 2|x-1|$

$\Leftrightarrow x^2 + 2|x| + 1 > 4(x^2 - 2x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(|x| + 4x) + 3 < 0$

$\boxed{x > 0}$

$3x^2 - 10x + 3 < 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3) < 0$ 5

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 3$ 5

$\boxed{x < 0}$

$3x^2 - 6x + 3 < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$ 5

මෙය විය නොහැක.

15

---

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 94% ක් පමණි. මෙම ප්‍රශ්නයෙන් මාපාංක ඇතුළත් ශ්‍රිතයන්හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් ඇඳීම වඩා පහසු වන අතර එමගින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ඉන් විසඳුම් සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 43% ක් පමණි.

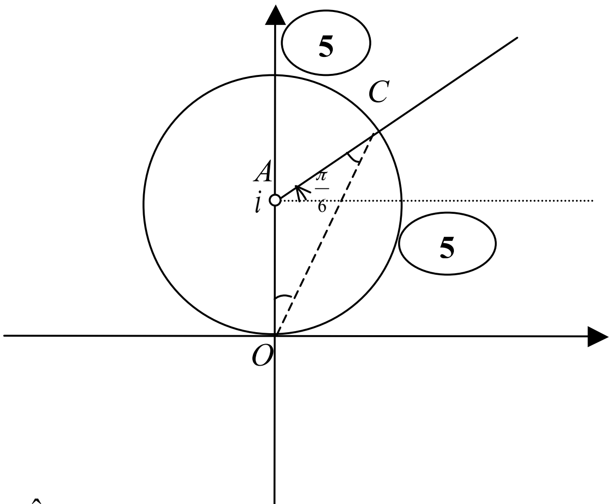
එම ප්‍රස්තාරවල වම් කොටසේ බාහු සමාන්තරව ඇඳීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. මාපාංක ඇතුළත් අසමානතා නිවැරදිව තහවුරු වන ආකාරයේ අභ්‍යාසවල විවිධ ක්‍රම යටතේ සිසුන් නිරත කරවීමෙන් මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීම පහසුවෙන් සිදුකළ හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $|z-i| = 1$, (ii) $\mathrm{Arg}(z-i) = \dfrac{\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.



$O\hat{A}C = \dfrac{2\pi}{3}$ වේ.

$OA = AC$, බැවින් $A\hat{O}C = A\hat{C}O$ වේ.

ඒනයින් $A\hat{O}C = \dfrac{\pi}{6}$ හා OC x- අක්ෂය සමඟ සාදන කෝණය $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. 5

තවද, $OC = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 5

ඒනයින් අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය

$y_C = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ 5

$x_C = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 5

$\therefore z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ 5

$r = \sqrt{3}$ හා $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ලෙස ගත හැක. 15

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 81% ක් පමණි. මෙය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක පථය පිළිබඳ මාතෘකාව යටතේ ඉදිරිපත් කර ඇති අතර පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 18% ක් පමණි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $|z-i|=1$ හි පථය පැහැදිලිව දක්වා තිබුණද, $Arg(z-i)=\pi/6$ දැක්වීමේදී එම පථය අර්ධ රේඛාවකින් දැක්විය යුතු බව හා $(0,1)$ ලක්ෂ්‍යය අයත් නොවිය යුතු බව හඳුනාගෙන නොතිබීම ලකුණු අහිමි වීමට හේතු විය.

පථ අඩංගු විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් ලකුණු මට්ටම වර්ධනය කර ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. එක් එක් සංඛ්‍යාංකය එක් වරක් පමණක් භාවිත කරයි නම්, 1, 2, 3, 4 හා 5 යන සංඛ්‍යාංකවලින්, සංඛ්‍යාංක පහකින් යුත් වෙනස් සංඛ්‍යා කීයක් සෑදිය හැකි ද?

මෙම සංඛ්‍යාවලින් (i) කොපමණක් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා වේ ද?

(ii) කොපමණක 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක එක ළඟ තිබේ ද?

5 4 3 2 1

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 5!$ 5

$= 120.$ 5

(i) අවසාන සංඛ්‍යාංකය 2 හෝ 4 විය යුතුය.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$ 5 5

(ii) $\boxed{3\ 4}$ එම පිළිවෙළට

ආකාර ගණන $= 4!$

$\boxed{4\ 3}$ එම පිළිවෙළට

ආකාර ගණන නැවත 4 ! වේ.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= 2 \times 4! = 48$

5

25

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. සංකරණ සංයෝජන මාතෘකාව යටතේ මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 48%කි. ගැටලුවෙහි පළමු කොටස අවබෝධ කර ගැනීම සාමාන්‍ය මට්ටමක පැවති අතර දෙවන කොටසෙහි සංකරණ පිළිබඳ අවබෝධය අඩු කම නිසා අවසාන පිළිතුර නිවැරදිව ලබා ගැනීමේ දෝෂ තිබුණි.

එකිනෙකට වෙනස් ගැටලු කියවා අවබෝධ කොට විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම තුළින් මෙම දෝෂ මඟහරවා ගැනීමට හැකිවේ.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\alpha > 0$ **යැයි ගනිමු.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} = 16$ **වන පරිදි වූ** α **හි අගය සොයන්න.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{(1+\cos(\alpha x))}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{2x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right)^2 \times \frac{\alpha^2}{2} \times \frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))} \quad 5$$

$$= 1^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{4}{2} \quad = \alpha^2 \quad 5$$

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \ (\because \alpha > 0) \quad 5$$

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

5

5

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}\times\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2\times\frac{\alpha^2}{4}\times\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

5

$$=1^2\cdot\frac{\alpha^2}{4}\cdot 4=\alpha^2 \quad 5$$

$$\therefore \alpha^2=16 \Rightarrow \alpha=4 \quad (\because \alpha>0)$$

5

25

---

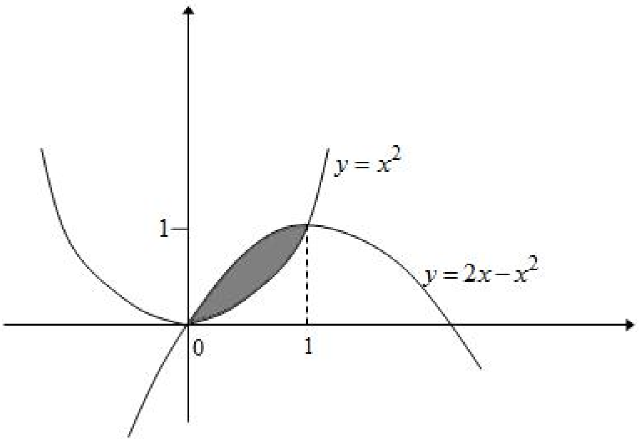
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණි. ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 46% ක් පමණි. දී ඇති ශ්‍රිතයේ සීමාව සෙවීමට හැකිවන ආකාරයට පරිවර්තනය කිරීමේ අවබෝධය සතුටුදායක මට්ටමක තිබුණ ද වීජීය ප්‍රකාශන සුළු කිරීමේ දෝෂ තිබීම සහ ත්‍රිකෝණමිතික සූත්‍ර පිළිබඳ මතකය මඳ බව ද, මෙහි ලකුණු අඩුවීමට හේතුවේ.

අවසාන පිළිතුර ලබාගත් අපේක්ෂකයන් ද අවශ්‍ය ප්‍රමේයයන් ආශ්‍රිත පියවර නිසි ලෙස නොදැක්වීම ලකුණු අඩුවීමට හේතුවේ. ත්‍රිකෝණමිතික සූත්‍ර පාඩම් කිරීම, වීජීය ප්‍රකාශන සුළු කිරීම පුහුණු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $y = x^2$ **හා** $y = 2x - x^2$ **වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක** $\frac{1}{3}$ **බව පෙන්වන්න.**



ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සඳහා $x^2 = 2x - x^2$

$$x(x-1) = 0$$

$x = 0$ හෝ $x = 1$.

අවශ්‍ය පිළිතුර $= \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$ 15

5 පහළ, ඉහළ අනුකල සීමා

5 පහළ සහ ඉහළ වක්‍ර හඳුනා ගැනීම

5 ප්‍රකාශනයට

$$= 2\int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$ 5

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$ 5

$= \frac{1}{3}$ වර්ග ඒකක

$\boxed{25}$

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. වර්ගජ ශ්‍රිතවල දළ සටහන් ඇඳීම හා එම වක්‍ර අතර වර්ගඵලය සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 38% ක් පමණි. වර්ගජ ශ්‍රිතවල දළ සටහන් ඇඳීමෙන් තොරව පිළිතුරු ලබා ගැනීමත් ශ්‍රිත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හඳුනා ගැනීමට අපොහොසත් වීමත් ලකුණු අහිමි වීමට හේතු විය.

සම්මත වක්‍ර කෙටි ක්‍රමවලින් ඇඳීමට සිසුන්ව හුරු කරවීම ලකුණු මට්ටම වර්ධනය කර ගැනීමේ ක්‍රමවේදයකි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ **සඳහා** $x=3\sin^2\frac{\theta}{2}$, $y=\sin^3\theta$ **යන පරාමිතික සමීකරණ මගින්** C **වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.**

$\frac{dy}{dx}=\sin 2\theta$ **බව පෙන්වන්න.**

C **මත වූ** P **ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයෙහි අනුක්‍රමණය** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **වේ නම්,** P **ට අනුරූප** θ **පරාමිතියෙහි අගය සොයන්න.**

$$\frac{dy}{d\theta}=6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

5

$$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \quad 5$$

$$=2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_P=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 5$$

$$2\theta=\frac{\pi}{3}\quad\left(\because 0<2\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91% ක් පමණි. පරාමිතික ශ්‍රිත අවකලනය හා දාම නීතිය යෙදීම තුළින් ශ්‍රිතයක අනුක්‍රමණය සෙවීම අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 52% ක් පමණි. දාම නීතිය යෙදීම නිවැරදි වුවද දී ඇති පරාමිතික ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමේ දෝෂ නිසා ලකුණු අහිමි වී තිබිණි. θ හි පරාසය 2θ සඳහා දැක්වීම පිළිතුරුවල දක්නට නොතිබිණි. ශ්‍රිත අවකලන ක්‍රම හුරුවන පරිදි අභ්‍යාස කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟ හැරවිය හැකිය.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. මූල ලක්ෂ්‍යයත්, $2x + 3y - k = 0$ හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන සරල රේඛාව l යැයි ගනිමු; මෙහි $k\ (\neq 0)$ නියතයකි. l හි සමීකරණය k ඇසුරෙන් සොයන්න. $(1, 1)$ හා $(3, 4)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක l හි එක ම පැත්තේ වන බව දී ඇත. $k < 18$ බව පෙන්වන්න.

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා, $l:\ 2x + 3y - k + \lambda(x - y + 1) = 0$ (5)

l, මූලය හරහා යන බැවින් $-k + \lambda = 0$

$\therefore \lambda = k$ (5)

$\therefore$ l හි සමීකරණය $(2 + k)x + (3 - k)y = 0$ (5)

$(1,1)$ හා $(3, 4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow [(2+k)+(3-k)][3(2+k)+4(3-k)] > 0$ (5)

$\Rightarrow \quad 5(18-k) > 0$

$\Rightarrow \quad k < 18.$ (5)

$\boxed{25}$

විකල්ප ක්‍රමය

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා, $l:\ x - y + 1 + \lambda(2x + 3y - k) = 0.$ (5)

l, මූලය හරහා යන බැවින්

$1 - \lambda k = 0$

$\Rightarrow \lambda k = 1$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{k}.\ (\because k \neq 0)$ (5)

$\therefore$ l හි සමීකරණය $\left(1 + \dfrac{2}{k}\right)x + \left(\dfrac{3}{k} - 1\right)y = 0$ වේ. (5)

$(1,1)$ හා $(3, 4)$ එකම පැත්තේ වේ.

$\Rightarrow \left[1 + \dfrac{2}{k} + \dfrac{3}{k} - 1\right]\left[3 + \dfrac{6}{k} + \dfrac{12}{k} - 4\right] > 0$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{5(18-k)}{k^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad k < 18.\ (\because k \neq 0)$ (5)

$\boxed{25}$

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. මෙම ප්‍රශ්නය සරල රේඛාව පිළිබඳ මූලධර්ම ඇසුරෙන් සකසා ඇති අතර එහි පහසුතාව 38%කි.

මෙම ගැටලුවේදී සරල රේඛා දෙකක ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය නිවැරදිව ලබාගෙන තිබෙනු දක්නට ලැබුණි. නමුත් සරල රේඛාවක් අනුබද්ධයෙන් ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටීම පිළිබඳව නිවැරදි සංකල්පය අවබෝධ කර ගෙන ඒ අනුව පිළිතුරු ලිවීමට උත්සාහ නොකිරීම නිසා එම කොටසට අදාළ ලකුණු අහිමි කර ගෙන තිබුණි.

මූලධර්මය නිවැරදිව අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (-5, 4)$ හා S යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය යැයි ගනිමු.

(i) S වෘත්තයේ ද

(ii) S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරන, කේන්ද්‍රය $(1, 1)$ ලෙස ඇති වෘත්තයේ ද

සමීකරණ සොයන්න.

(i) $\dfrac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)} = -1$, $x \neq 1, -5$ සඳහා 5

$S : (x-1)(x+5) + (y-2)(y-4) = 0$ 5

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $x^2 + y^2 - 2x - 2y + c' = 0$. 5

S හා S' ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ. $\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$, මෙහි $g = 2, f = -3, g' = -1, f' = -1,$ $c = 3$ හා $c' = c'$. 5

$\Rightarrow 2(2)(-1) + 2(-3)(-1) = 3 + c'$

$\Rightarrow \qquad c' = -1$ 5

$\therefore S' : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ 25

විකල්ප ක්‍රමය

(i) $S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ 10

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යැයි ගනිමු.

එවිට $S':(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ 5

$x^2+y^2-2x-2y+2-r^2=0.$

S හා S' ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ. $\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c'$, මෙහි $g=2, f=-3, g'=-1, f'=-1,$ $c=3$ හා $c'=2-r^2$.

$2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+(2-r^2)$ 5

$\Rightarrow \quad r^2=3$ 5

$\therefore S':x^2+y^2-2x-2y-1=0$

25

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86% ක් පමණි. වෘත්තය පිළිබඳ මූලධර්ම ඇසුරෙන් සකසා ඇති ප්‍රශ්නයක් වන අතර එහි පහසුතාව 32%කි.

මෙහි (i) කොටසට අදාළ AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය නිවැරදිව ලබා නොගැනීම නිසා ද එය නිවැරදිව ලබාගත් අපේක්ෂකයන්ට වුවද වෘත්ත දෙකක ප්‍රලම්බ ඡේදනය සඳහා ඇති මූලධර්මය නිවැරදිව යොදා නොගැනීම හේතුවෙන් ද එම ලකුණු අහිමි කරගෙන තිබුණි. මූලධර්මය අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කිරීම මගින් මෙම දුර්වලතා මඟහරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ **සඳහා** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ **සමීකරණය විසඳන්න.**

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

5 5

$$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x$$

$$\cos 2x(2\cos x + 1) = \sin 2x(2\cos x + 1) \quad 5$$

$$\cos 2x = \sin 2x \ \left(\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos x + 1 \ne 0\right)$$

5

$$\tan 2x = 1 \ (\because \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \ne 0)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \ \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{8}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 83%ක් පමණි. මෙය ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ විසඳීම සම්බන්ධ ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 18%කි. මෙම ගැටලුවේදී මුල් පියවර නිවැරදිව සිදු කර තිබුණත් බොහෝ අපේක්ෂකයින් $2\cos x + 1$ ප්‍රකාශනය $\ne 0$ බව සලකා එම සාධකය ඉවත් කර තිබීමෙන් නිවැරදි සම්පූර්ණ විසඳුම ලබා ගැනීමට අපොහොසත් වී තිබුණි.

සාධක ඇතුළත් ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ විසඳීමට සිසුන්ව යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟහරවා ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $a \neq 0$ හා $a+b+c \neq 0$ වන පරිදි වූ $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.
$f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a+b+c)$ බව ද $\frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\frac{1}{\beta - 1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $g(x) = (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$ වේ.

දැන්, $a > 0$ හා $a+b+c > 0$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

$g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a+b+c)m_2 = am_1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ හා $q(x) = x^2 + 3x + 6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න.
$p(x) = (x-1)\,q(x) + 5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x-1)(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(*a*) $f(1) = a+b+c \neq 0$. (5)

$\therefore$ 1, $f(x) = 0$ හි මූලයක් නොවේ. (5)

10

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ හා $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. (5) (දෙකම සඳහා)

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$ (5)

$= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1$

$= \frac{a+b+c}{a}$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක්

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ (5)

$f(1) = a(1-\alpha)(1-\beta) = a+b+c$ (5)

$(1-\alpha)(1-\beta) = \frac{a+b+c}{a}$ (5)

15

$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\beta_1 = \frac{1}{\beta - 1}$ යැයි ගනිමු.

α_1 හා β_1 මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $(x - \alpha_1)(x - \beta_1) = 0$ වේ.

එනම් $x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1 = 0$ ----------------------(1) (10)

දැන් $\alpha_1+\beta_1=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 5

$$=\frac{-\frac{b}{a}-2}{(a+b+c)/a}=-\frac{(2a+b)}{a+b+c}.$$ 5

තවද $\alpha_1\beta_1=\dfrac{a}{a+b+c}.$ 5

(1) මගින් අවශ්‍ය සමීකරණය $x^2+\dfrac{(2a+b)}{(a+b+c)}x+\dfrac{a}{a+b+c}=0$ වේ.

$\Leftrightarrow (a+b+c)x^2+(2a+b)x+a=0$

$\Leftrightarrow g(x)=0$, මෙහි $g(x)=(a+b+c)x^2+(2a+b)x+a$. 5 **30**

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$ 5

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0\quad(\because a>0)}-\frac{\Delta}{4a}$$ 5

$\geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ හා ($x=-\dfrac{b}{2a}$ විට = ලකුණ ලැබේ.)

5 5

$\therefore$ $f(x)$ හි අවම අගය $-\dfrac{\Delta}{4a}$ වේ. 5

එනම් $m_1=-\dfrac{\Delta}{4a}.$ **25**

එබැවින් $m_2=-\dfrac{\Delta'}{4(a+b+c)}$, 5

මෙහි $\Delta'=(2a+b)^2-4(a+b+c)\cdot a$

$$=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac$$ 5

$= b^2 - 4ac$

$= \Delta.$ 5

ඒනයින් $m_2 = \dfrac{-\Delta'}{4(a+b+c)}$

$= \dfrac{4a\,m_1}{4(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)m_2 = am_1.$ 5

$\boxed{20}$

$x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow m_1 \geq 0$ 5

$\Leftrightarrow m_2 \geq 0 \qquad \because m_2 = \dfrac{a\,m_1}{(a+b+c)}$ 5

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0.$ 5

$\boxed{15}$

(b) $p(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $p(1) = 5$ වේ. 5

$q(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $q(2) = 16$ වේ. 5

$\boxed{10}$

$(x-1)q(x) + 5 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) + 5$ 5

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ 5

$= p(x).$

$\boxed{10}$

$q(x) = (x-2)(x-5) + 16$

$\therefore\ p(x) = (x-1)\{(x-2)(x+5) + 16\} + 5$

$= (x-1)(x-2)(x+5) + 16x - 11.$

ඒනයින් අවශ්‍ය ශේෂය $16x - 11$ වේ.

$\boxed{15}$

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $(1+x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ සඳහා $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n-r}{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^r, x^{r+1} හා x^{r+2} හි සංගුණක එම පිළිවෙළට ගත් විට $1 : 2 : 3$ අනුපාත වලින් යුතු වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී $n = 14$ හා $r = 4$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ හා $f(r) = r(Ar+B)$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = -3 - \dfrac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(*a*) $(1+x)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

5 5 **10**

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ සඳහා

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$$ 10

$$= \frac{\dfrac{1}{r+1}}{\dfrac{1}{n-r}} = \frac{n-r}{r+1}. \text{ ------------ } (1)$$ 5

15

එලෙසම $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$ සඳහා

$$(1) \Rightarrow \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}.$$ 5

${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$ බව දී ඇත.

5

$\Rightarrow \dfrac{n-r}{r+1} = 2$ හා $\dfrac{n-r-1}{r+2} = \dfrac{3}{2}$

5 5

$\Rightarrow n - r = 2(r+1)$-------- (2) හා $2(n-r-1) = 3(r+2)$

$\Rightarrow 4(r+1) - 2 = 3r + 6$

$\Rightarrow r = 4$, හා (2) මගින් $n = 14$ වේ.

5 5

30

(b) $\dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} = \dfrac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$ 10

$\Leftrightarrow 10r + 9 = r(Ar+B)(2r+1) - (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$ 5

$= r\left[2Ar^2 + (A+2B)r + B\right] - (r+1)\left[2Ar^2 + (2A+2B-3A)r - 3(A+B)\right]$

$= 2Ar^3 + (A+2B)r^2 + Br - 2Ar^3 - (2B-A)r^2 + 3(A+B)r - 2Ar^2 - (2B-A)r + 3(A+B)$

$= -(4A+2B)r + 3(A+B)$, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා 5

$\Leftrightarrow r^1 : 4A + 2B = 10$ හා $r^0 : 3A + 3B = 9$ 10

$\Leftrightarrow A = 2$ හා $B = 1$.

5 5

40

$U_r = g(r) - g(r+1)$, මෙහි $g(r) = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$ ද $f(r) = r(2r+1)$ ද වේ.

$r = 1;\quad U_1 = g(1) - g(2)$

$r = 2;\quad U_2 = g(2) - g(3)$ 10

$\vdots$

$r = n-1;\quad U_{n-1} = g(n-1) - g(n)$

$r = n;\quad U_n = g(n) - g(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1) - g(n+1)$ 10

$$= \frac{(1)(3)}{(-1)(1)} - \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$ 5 5

$$= -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$$

30

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{-3 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}\right\}$$ 5

5

$$= -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$ 5

එනයින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{2}$ වේ. 5

5

25

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13.(*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ හා $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{Y}$ වන පරිදි λ හා μ තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ හා $\mathbf{AP}$ සොයා, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2+i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2\,(OA)$ හා $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ; මෙහි O යනු මූලය ද $A\hat{O}B$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(*c*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ද $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. $\operatorname{Im} w = -1$ හා $|w-1+i| = 5$ බව දී ඇත. $z = \pm(2+i)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 5

$\lambda\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ 5

දැන් $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5

$\Leftrightarrow \lambda = 2.$

$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mu\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}.$

දැන් $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5

$\Leftrightarrow \mu = -1.$ 5

25

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$-a-2c=1$

$-b-2d=0$

$a+c=0$

$b+d=1$

$\Rightarrow c=-1, a=1$

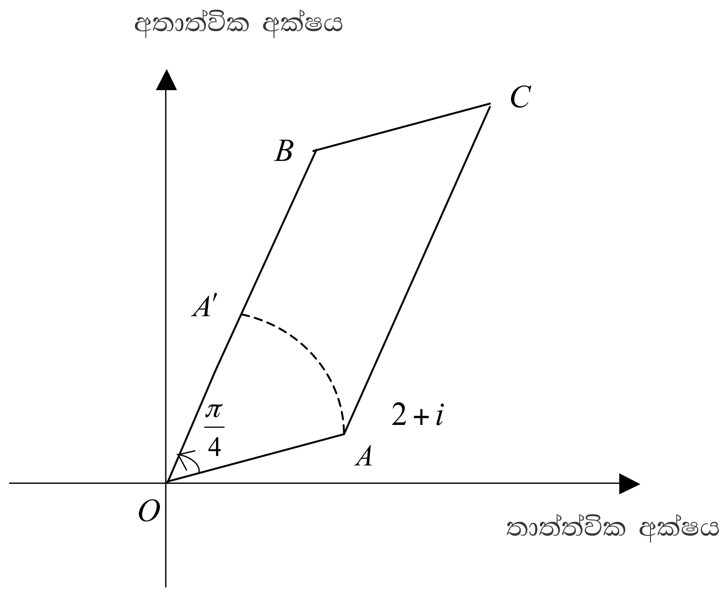
$\Rightarrow d=-1, b=2$

$$\therefore \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$ 15

$$\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$ 5

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{D}.$$ 5 $\boxed{25}$

(*b*)



$\dfrac{\pi}{4}$ කෝණයක් මගින් O වටා OA රේඛාව වාමාවර්ථව භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන A' ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව 10

$$z_1=(2+i)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i).$$ 5

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$.

B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$z_2 = 2z_1$

$= \sqrt{2}(1+3i)$ මගින් දෙනු ලැබේ. 10 $\boxed{25}$

C ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$= (2+i) + z_2$ 10

$= 2 + i + \sqrt{2}(1+3i)$

$= (2+\sqrt{2}) + (1+3\sqrt{2})i.$ 5 $\boxed{15}$

(c) $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$

$= \dfrac{2(1-i)}{2} + \dfrac{5z(2-i)}{5}$ 5

$= 1 - i + z(2-i).$ 5

$\operatorname{Im} w = -1 \Rightarrow -1 = -1 + \operatorname{Im} z(2-i)$ 15

$\Rightarrow \operatorname{Im} z(2-i) = 0$

$\Rightarrow z(2-i) = \bar{z}(2+i)$ ------(1)

$|w - 1 + i| = 5 \quad \Rightarrow |z(2-i)| = 5$

$\Rightarrow |z||2-i| = 5$

$\Rightarrow |z|\sqrt{5} = 5$ 15

$|z| = \sqrt{5}$ -----------(2)

$(1)\times z \;\Rightarrow\; z^2(2-i) = z\,\bar{z}\,(2+i)$

$(2) \qquad \Rightarrow \qquad z\,\bar{z} = 5$

$\therefore z^2\left(2-i\right) = 5(2+i)$ 10

$z^2 = \dfrac{2+i}{2-i}.5 = \dfrac{5}{5}\left(2+i\right)^2$ 10 $\boxed{60}$

$\therefore z = \pm(2+i).$

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

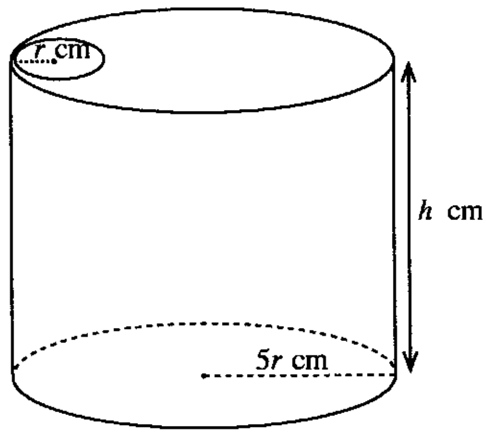
$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) අරය $5r$ cm හා උස h cm වූ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක හැඩය ඇති තුනී ලෝහ බඳුනකට, අරය r cm වූ වෘත්තාකාර සිදුරක් සහිත අරය $5r$ cm වූ වෘත්තාකාර පියනක් ඇත. (රූපය බලන්න.) බඳුනෙහි පරිමාව 245π cm^3 වන බව දී ඇත. සිදුර සහිත පියන සමග බඳුනෙහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1).2.(x-3) - (x-3)^2.2x}{(x^2-1)^2} \quad 15$$

$$= \frac{2(x-3)\left[x^2-1-x(x-3)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$ ඒනයින් $y = 1.$ 5

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = \pm 1$ 5

$\boxed{10}$

$y = f(x)$ හා $y = 1$ සමගාමීව විසඳමු.

i.e $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-1} = 1$ 5

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$

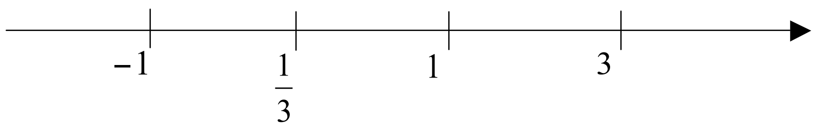
$\Leftrightarrow 6x = 10$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}.$ 5

ඒනයින් අවශ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $= \left(\dfrac{5}{3}, 1\right).$ 5

15

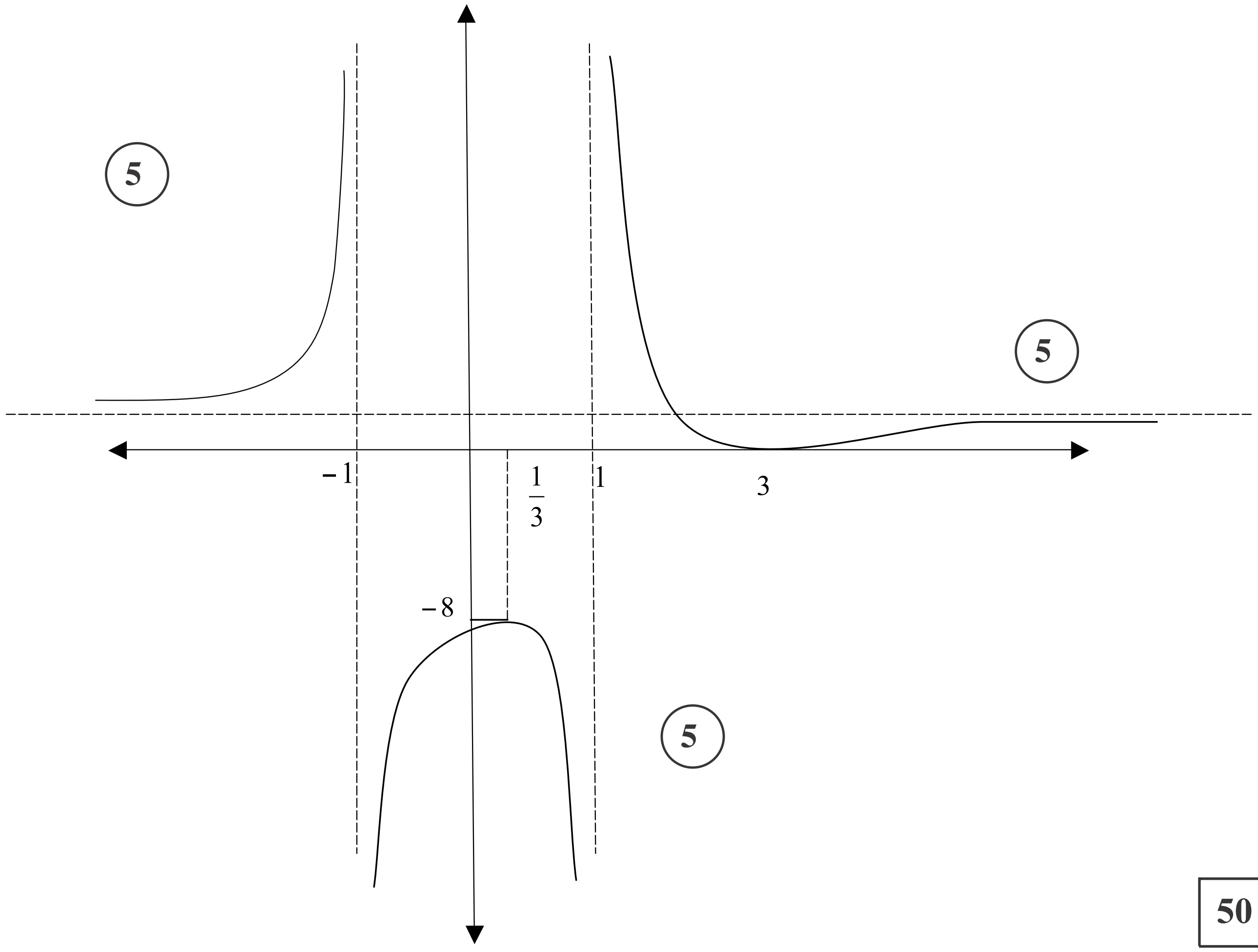
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ හෝ $x = \dfrac{1}{3}.$



	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)
	5	5	5	5	5

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය දෙකක් ඇත. $\left(\dfrac{1}{3}, -8\right)$ – ස්ථානීය උපරිමය 5 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}-3\right)^2}{\dfrac{1}{9}-1} = \dfrac{64}{-8} = -8$

$(3,0)$ – ස්ථානීය අවමය 5



50

(b) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 \times 2 - \pi r^2$ 10

$= 10\pi rh + 49\pi r^2$ ----------(1)

$245\pi = \pi(5r)^2 \times h$ 5

$\therefore h = \dfrac{245}{25r^2} = \dfrac{49}{5r^2}$

$(1) \Rightarrow S = 10\pi r \times \dfrac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$ 5

$= 49\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right);\ r > 0.$

20

$\dfrac{dS}{dr} = 49\pi\left(2r - \dfrac{2}{r^2}\right)$ 10

5 $\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = \dfrac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = 1.$ ($r > 0$ බැවින්) 5

5 $0 < r < 1$ සඳහා $\dfrac{dS}{dr} < 0$ හා $r > 1$ සඳහා $\dfrac{dS}{dr} > 0$ 5

$\therefore r = 1$ විට S උපරිම වේ. 5

35

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ සොයා, **ඒ නයින්**, $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්**, $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^n(\ln x)\,dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx$ අගයන්න.

(a) (i)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \quad 10$$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_1$, මෙහි අභිමත C_1 නියතයකි. 10

20

(ii) $\frac{d\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-1/2} \times (2-2x)$

$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 10

ඒනිසා,

$\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{3+2x-x^2} + C_2$, මෙහි C_2 අභිමත නියතයකි. 10

$\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 10

$= -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_3$, මෙහි C_3 අභිමත නියතයකි.

5 5

40

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 10

$$2x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

x^2: $0 = A + B$

x^1: $2 = B + C$

$A - C = -2$

x^0: $-1 = A + C$

$A = -3/2$

$C = 1/2$ 10

$B = 3/2$

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3x+1}{x^2+1}$$ 5

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{-3}{2}\int\frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{3x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_4,$$ 15

මෙහි C_4 අභිමත නියතයකි. **40**

(*c*) (i) $n \neq -1$,

$$\int x^n(\ln x)dx = \int(\ln x).\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int\frac{x^{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{x}dx$$ 10

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C_5$$ 10

මෙහි C_5 අභිමත නියතයකි. **30**

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$. 5

15 **20**

---

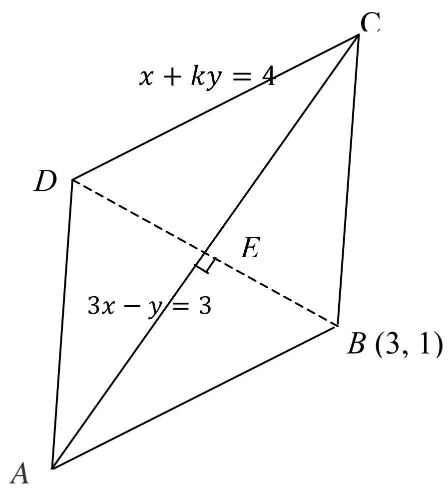
16 වන ප්‍රශ්නය

16. (*a*) $ABCD$ රොම්බසයක AC විකර්ණයෙහි සමීකරණය $3x-y=3$ ද $B\equiv(3,1)$ ද වේ. තව ද CD හි සමීකරණය $x+ky=4$ වේ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගය හා BC හි සමීකරණය සොයන්න.

(*b*) පිළිවෙළින් $x^2+y^2=4$ හා $(x-1)^2+y^2=1$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වෘත්තවල දළ සටහන්, ඒවායේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වමින් අඳින්න.

C_3 වෘත්තයක් C_1 අභ්‍යන්තරව ද C_2 බාහිරව ද ස්පර්ශ කරයි. C_3 හි කේන්ද්‍රය $8x^2+9y^2-8x-16=0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(*a*)



BD හි සමීකරණය $y-1=-\frac{1}{3}(x-3)$ $(\because BD \perp AC)$ 10

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=t$ යැයි ගනිමු. 10

$\therefore x=3+3t$ හා $y=1-t$.

t යන්න D ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වේ යැයි ගනිමු.

$E\equiv\left(3+\frac{3t}{2},1-\frac{t}{2}\right); AC$ මත පිහිටා ඇති බැවින්

$\therefore 3\left(3+\frac{3t}{2}\right)-\left(1-\frac{t}{2}\right)=3$

$\Rightarrow 8+5t=3 \qquad \Rightarrow t=-1.$ 10

$\therefore D\equiv(0,2)$

මෙය DC මත වේ. 10

$0+k\times 2=4$ 10

$k=2.$

50

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 3x-y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 7x=10\,;7y=9$$

$$C\equiv\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right).$$ 10

BC හි සමීකරණය

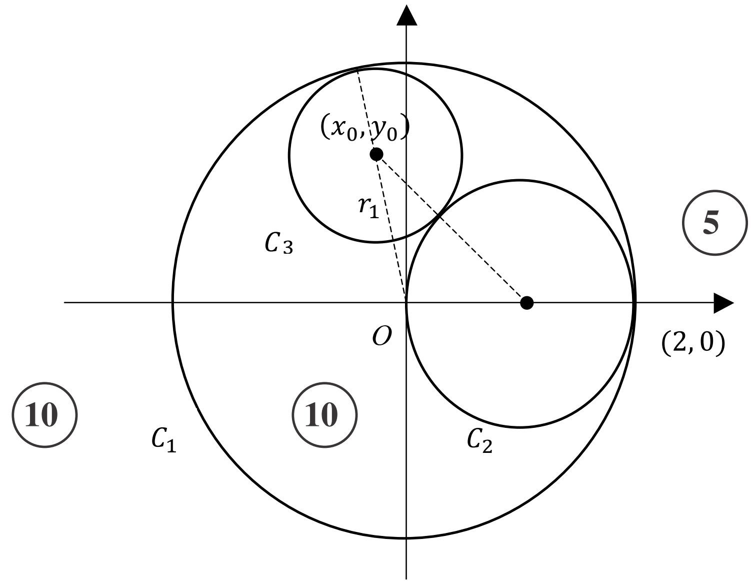
$$y-1=\frac{\frac{2}{7}}{-\frac{11}{7}}(x-3)$$

$$-11y+11=2x-6$$ 10

$$2x+11y=17.$$

20

(*b*)



25

C_3 , C_1 අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow\quad 2-r_1=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$ 15

C_3 ,C_2 බාහිරව ස්පර්ශ කරයි $\Rightarrow 1+r_1=\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2}$

$$3=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2}$$ 15

$$(x_0-1)^2+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$ 5

$${x_0}^2-2x_0+1+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$ 10

$$2x_0+8=6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$$ 5

$$\Rightarrow\ ({x_0}^2+{y_0}^2)={x_0}^2+8x_0+16$$

$$\Rightarrow 8{x_0}^2+9{y_0}^2-8x_0-16=0$$

ඒනයින් (x_0,y_0), යන්න $8x^2+9y^2-8x-16=0$ වක්‍රය මත පිහිටයි. 5

55

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha+\beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර,

$(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \quad 10 \qquad \boxed{10}$$

Let $\alpha = \beta = \theta$: 5

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}. \quad 5 \qquad \boxed{10}$$

$$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta) \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta) + 2\tan\theta}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta} \quad 5$$

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} \quad 5 \qquad \boxed{20}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{1 - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$ 5

$$\Rightarrow -3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 1 = 0. \qquad \left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.\right)$$ බැවින්, 5

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right),\ x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$ හි විසඳුමකි. 5

15

$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \neq -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ යන්න $x^2 - 4x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් වේ. 5

5

එනම් $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ 5

$\frac{5\pi}{12} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 1.$ 5

$2 - \sqrt{3} < 1,$ බැවින් $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}.$ 5

25

(*b*) $0 < A < \pi.$ 5

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$$ 5

5

15

කෝසයින නීතිය

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$ 5

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

දැන්, $$\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}{1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}$$ 10

$$= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc - a^2 + b^2 + c^2} \quad 5$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a)(a+b+c)} \quad 5$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = (a+b-c)(a+c-b). \quad 5$$

$\boxed{30}$

(*c*) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ යැයි ගනිමු

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha > 0$

$\cos\beta > 0.$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad 5$$

$$= \frac{3}{5}.\sqrt{1-\frac{25}{169}} + \sqrt{1-\frac{9}{25}}.\frac{5}{13} \quad 5$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$$

$$= \frac{56}{65}. \quad 5$$

$\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ වේ.

එලෙසම $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$, බැවින් $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ වේ.

$\therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ හා ඒනයින් $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ වේ. 10

$\boxed{25}$
