

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ட்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

විභාග අංකය

උපදෙස්:

- * මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- * **A කොටස:**
සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- * **B කොටස:**
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- * නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- * ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ:	1
	2
අධීක්ෂණය කළේ:	

A කොටස

1. ගණිත අග්‍රණයේ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

2. එක ම රූප සටහනක $y = |x| + 1$ හා $y = 2|x - 1|$ හි ප්‍රස්ථාරවල දළ සටහන් අඳින්න. ඒ නිසින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x| + 1 > 2|x - 1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

5. $\alpha > 0$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}} = 16$ වන පරිදි වූ α හි අගය සොයන්න.

6. $y = x^2$ හා $y = 2x - x^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

9. $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (-5, 4)$ හා S යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය යැයි ගනිමු.

(i) S වෘත්තයේ ද

(ii) S වෘත්තය ප්‍රලම්භ ව ජේදනය කරන, කේන්ද්‍රය $(1, 1)$ ලෙස ඇති වෘත්තයේ ද සමීකරණ සොයන්න.

10. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ සමීකරණය විසඳන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka
 ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
 இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2016 අගෝස්තු
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2016 ஓகஸ்ட்
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2016

සංයුක්ත ගණිතය I
 இணைந்த கணிதம் I
 Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $a \neq 0$ හා $a + b + c \neq 0$ වන පරිදි වූ $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.
 $f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.
 $f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු.
 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a + b + c)$ බව ද $\frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\frac{1}{\beta - 1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$
 මගින් දෙනු ලබන බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $g(x) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$ වේ.
 දැන්, $a > 0$ හා $a + b + c > 0$ යැයි ගනිමු.
 $f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.
 $g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a + b + c)m_2 = am_1$ බව අපෝහනය කරන්න.
 ඒ නමුත්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න.
- (b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ හා $q(x) = x^2 + 3x + 6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න.
 $p(x) = (x - 1)q(x) + 5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x - 1)(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

12. (a) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $(1 + x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.
 සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ සඳහා $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{n - r}{r + 1}$ බව පෙන්වන්න.
 $(1 + x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^r, x^{r+1} හා x^{r+2} හි සංගුණක එම පිළිවෙළට ගත් විට $1 : 2 : 3$ අනුපාත වලින් යුතු වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී $n = 14$ හා $r = 4$ බව පෙන්වන්න.
- (b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{10r + 9}{(2r - 3)(2r - 1)(2r + 1)}$ හා $f(r) = r(Ar + B)$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.
 $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{f(r)}{(2r - 3)(2r - 1)} - \frac{f(r + 1)}{(2r - 1)(2r + 1)}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.
 $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n U_r = -3 - \frac{(n + 1)(2n + 3)}{(4n^2 - 1)}$ බව පෙන්වන්න.
 $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඵලකාය සොයන්න.

13.(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$AX = \lambda X$ හා $AY = \mu Y$ වන පරිදි λ හා μ තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. P^{-1} හා AP සොයා, $P^{-1}AP = D$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

(b) ආගන්ති සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2+i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2(OA)$ හා $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ; මෙහි O යනු මූලය ද $\angle AOB$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(c) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ද $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. $\text{Im } w = -1$ හා $|w - 1 + i| = 5$ බව දී ඇත. $z = \pm(2+i)$ බව පෙන්වන්න.

14.(a) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $f'(x) = \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

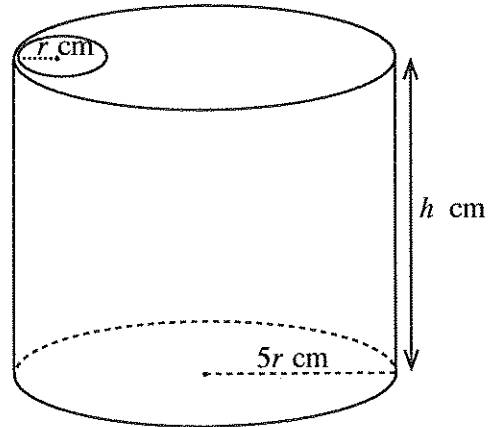
$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) අරය $5r$ cm හා උස h cm වූ සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක හැඩය ඇති කුඩා ලෝහ බඳුනකට, අරය r cm වූ වෘත්තාකාර සිදුරක් සහිත අරය $5r$ cm වූ වෘත්තාකාර පියනක් ඇත. (රූපය බලන්න.) බඳුනෙහි පරිමාව $245\pi \text{ cm}^3$ වන බව දී ඇත. සිදුර සහිත පියන සමග බඳුනෙහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S \text{ cm}^2$ යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 49\pi \left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



15.(a) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{3+2x-x^2} \right)$ සොයා, ඒ නඟින්න. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ සොයන්න.

(b) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ හිත්ත භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නඟින්න. $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)} dx$ සොයන්න.

(c) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^n (\ln x) dx$ සොයන්න.

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$ අගයන්න.

16.(a) $ABCD$ රාමබසයක AC විකර්ණයෙහි සමීකරණය $3x - y = 3$ ද $B \equiv (3, 1)$ ද වේ. තව ද CD හි සමීකරණය $x + ky = 4$ වේ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගය හා BC හි සමීකරණය සොයන්න.

(b) පිළිවෙළින් $x^2 + y^2 = 4$ හා $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වෘත්තවල දළ සටහන්, ඒවායේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වමින් අඳින්න.

C_3 වෘත්තයක් C_1 අභ්‍යන්තරව ද C_2 බාහිරව ද ස්පර්ශ කරයි. C_3 හි කේන්ද්‍රය $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

17.(a) $\tan \alpha$ හා $\tan \beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha + \beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාමය ලියා දක්වන්න.

ඒ නමින්, $\tan \theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \frac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan \frac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර,

$(a + b + c)(b + c - a) \tan^2 \frac{A}{2} = (a + b - c)(a + c - b)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{5}{13} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{56}{65} \right)$ බව පෙන්වන්න.
