2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r+1) = n(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා L.H.S. = $1.(3+1) = 4$ හා R.H.S. = $1.(1+1)^2 = 4$ 5

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

i.e. $\sum_{r=1}^{p} r(3r+1) = p(p+1)^2$. --------------(1) 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r(3r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(3r+1) + (p+1)(3p+4)$ 5

$= p(p+1)^2 + (p+1)(3p+4)$

$= (p+1)(p^2 + p + 3p + 4)$

$= (p+1)(p+2)^2$. 5

එනයින් $n = 1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = p + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බැව් ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$\boxed{25}$

---

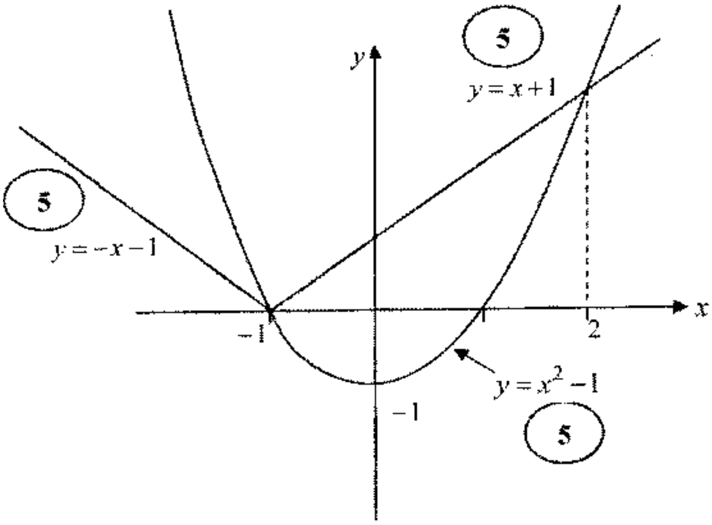
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 98% ක් පමණි. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය නිසියාකාරව යෙදීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 61% කි. $n = p;\ p \in \mathbb{Z}^+$ ට උපකල්පනයේදී $\sum_{r=1}^{p} r(3r+1) = p(p+1)^2$ ලෙස ලිවිය යුතු වුවත් $\sum_{r=1}^{p} p(3p+1) = p(p+1)^2$ වැනි වැරදි ආකාරයට ලියා තිබීම නිසා අපේක්ෂකයන් සුළු ප්‍රමාණයකට එම පියවර සඳහා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. එලෙසම $n = p + 1$ සඳහා වූ සාධනය ද නිවැරදි නොවීය.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ පියවර තහවුරු වන පරිදි අභ්‍යාසවලට යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගැනීමට සිසුන් උනන්දු කරවිය යුතුය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $x^2 - 1 \geq |x+1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂවලදී $x \geq -1$ සහ $x^2 - 1 = x + 1$ විය යුතුයි. එම නිසා $x = -1$ හා $x = 2$ වේ. 5

$x \leq -1$ සහ $x \geq 2$ වන x තෘප්ත වන අගයන් විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{නම් } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{නම් } x < -1 \end{cases}$$

(i) අවස්ථාව $x \geq -1$

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq x + 1$ 5

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$. 5

$x \geq -1$ නිසා, $x = -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් වේ.

(ii) අවස්ථාව $x < -1$,

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \quad \Leftrightarrow \; x^2 - 1 \geq -(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow \; x^2 + x \geq 0$

$\Leftrightarrow \; x(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; x \leq -1$ හෝ $x \geq 0$. 5

$x < -1$ නිසා, $x < -1$ විසඳුම් වේ.

අවස්ථා දෙකෙන් $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

(i) අවස්ථාව $x > -1$,

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq +(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow \; x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$. 5

$x > -1$ නිසා, $x \geq 2$ විසඳුම් වේ.

(ii) අවස්ථාව $x \leq -1$,

$x^2 - 1 \geq |x+1| \quad \Leftrightarrow \; x^2 - 1 \geq -(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow \; x \leq -1$ හෝ $x \geq 0$. 5

$x \leq -1$ නිසා, $x \leq -1$ විසඳුම් වේ.

අවස්ථා දෙකෙන් $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 3

(i) අවස්ථාව $x^2 \geq 1$

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq 0$, හා පැති දෙකම ධන අගයක් ගනී.

$\therefore \; x^2 - 1 \geq |x+1|$

$\Leftrightarrow \; (x^2 - 1) \geq (x+1)^2$ 5

$\Leftrightarrow \; (x+1)^2 \; (x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0.$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \; [(x-1)^2 - 1] \geq 0.$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \; x\,(x-2) \geq 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad x = -1$ හෝ $x \leq 0$ හෝ $x \geq 2$ 5

$x^2 \geq 1$ නිසා $\Leftrightarrow x \leq 1$ හෝ $x \geq 1$ වේ. $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් වේ. 5

(ii) අවස්ථාව $x^2 < 1$

$x^2 - 1 < 0,$ නිසා පිළිතුරක් නොමැත. අවස්ථා දෙකෙන්ම $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ ලෙස ලැබේ. 5

25

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

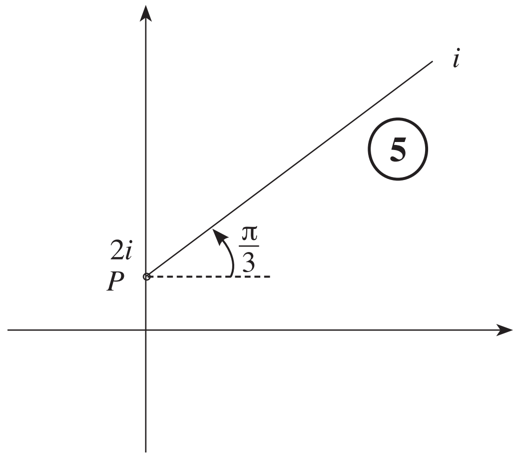
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 95%ක් පමණි. එහි පහසුතාව 45%ක් පමණි. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයෙන් පිළිතුරු සැපයීම වඩාත් සාර්ථක වී තිබුණු අතර හුදෙක් වීජීය ක්‍රම භාවිත කිරීමෙන් සාර්ථකව පිළිතුරු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි.

මාපාංක පිළිබඳ අසමානතා නිවැරදිව තහවුරු වන ආකාරයේ ගැටලු වීජීය ක්‍රම භාවිතයෙන් විසඳීමට සිසුන් නිරත කරවීමෙන් වඩාත් සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට යොමු කළ හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z - 2i) = \dfrac{\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථය වන l හි දළ සටහනක් අඳින්න.

P හා Q යනු ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙළින් $2i$ හා $\sqrt{3} + 5i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. PQ දුර සොයා Q ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.



$$(\sqrt{3} + 5i) - 2i = \sqrt{3} + 3i$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad 5$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\} \quad 5$$

$$\therefore\ PQ = 2\sqrt{3} \quad 5$$

තවද, $\text{Arg}\left((\sqrt{3} + 5i) - 2i\right) = \dfrac{\pi}{3}$ හා එනයින් Q, l මත පිහිටයි

5

$\boxed{25}$

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් උත්සාහ කර ඇත්තේ 83%ක් වන අතර පහසුතාව 21%ක් පමණි.

රේඛාවක ආනතිය සහ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රධාන විස්තාරය පිළිබඳව නිසි අවබෝධයක් නොමැති කම නිසා නිවැරදිව පිළිතුරු සැපයීමට නොහැකි වී තිබුණි.

විස්තාරය, මාපාංකය ඇතුළත් සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. **INFINITY යන වචනයෙහි අකුරු අට, වෙනස් ආකාර කීයකට පේළියක පිළියෙල කළ හැකි ද? මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණක**

(i) I අකුරු තුන ම එක ළඟ තිබේ ද?

(ii) හරියටම එක I අකුරක් හා N අකුරු දෙක ම මුල් අකුරු තුන ලෙස තිබේ ද?

I	N	F	T	Y
3	2	1	1	1

$$\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} \quad 5$$

$$= 3360. \quad 5$$

(i) $\frac{6!}{2!} = 360.$ 5

(ii)

I	F	T	Y
2	1	1	1

N	N	I					
N	I	N					
I	N	N					

5

$$\frac{5!}{2!} \times 3 = 5 \times 4 \times 3 \times 3$$

$$= 180. \quad 5$$

25

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් උත්සාහ කර ඇත්තේ 91%ක් වන අතර පහසුතාව 32%ක් පමණි.

සංකරණ හා සංයෝජන මූලධර්ම පිළිබඳ ව නිවැරදි අවබෝධයක් නොමැතිකම නිසා මෙම ගැටලුවට පිළිතුරු සැපයීම එතරම් සාර්ථක වී නොතිබුණි.

සංකරණ හා සංයෝජන මූලධර්ම පිළිබඳව අවබෝධ වන පරිදි සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කරවීමෙන් හා විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳීම ප්‍රගුණ කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැක.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = 3\alpha^2\cos^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)\cos x\cos\alpha\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \underbrace{\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}}_{5}\cdot\cos x\cos\alpha\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2) \quad 5$$

$$= 1\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(3\alpha^2)$$

$$= 3\alpha^2\cos^2\alpha . \quad 5$$

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{\tan(x-\alpha)(1+\tan x\tan\alpha)} \quad 5 \qquad \left(\because \tan(x-\alpha) = \frac{\tan x - \tan\alpha}{1+\tan x\tan\alpha}\right)$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{\tan(x-\alpha)}\cdot\frac{x^2+\alpha x+\alpha^2}{(1+\tan x\tan\alpha)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \underbrace{\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}}_{5}\cdot\frac{\cos(x-\alpha)\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{(1+\tan x\tan\alpha)}$$

$$= 1\cdot\frac{1\cdot 3\alpha^2}{1+\tan^2\alpha} \quad 5$$

$$= \frac{3\alpha^2}{\sec^2\alpha} = 3\alpha^2\cos^2\alpha . \quad 5$$

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{\tan x-\tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}\cdot\cos x\cos\alpha \quad 5$$

$$= 3\alpha^2\cdot 1\cdot\cos^2\alpha$$

5

$$= 3\alpha^2\cos^2\alpha. \quad 5$$

$\boxed{25}$

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 90%ක් පමණි. ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 41%ක් පමණි.

ශ්‍රිතයේ සීමාව සෙවීමට හැකිවන ආකාරයට පරිවර්තනය කර ගැනීමේදී සාධක පිළිබඳ දැනුමේ මඳකම ද, ප්‍රමේයයන් නිවැරදිව යෙදිය හැකි ආකාරයට සකසා ගැනීමේ දුර්වලතා ද දක්නට ලැබුණි.

මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගැනීම සඳහා සාධක පිළිබඳ දැනුම මෙන්ම ප්‍රමේයයන් භාවිත වන ආකාරය අනුව ව්‍යුහගත වූ ගැටලු විසඳීමට යොමු කරවීම ඉතාම වැදගත් වේ.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $0<a<b$ යැයි ගනිමු. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(b-a)}{b}\cos^2 x}} \times \sqrt{\frac{b-a}{b}} \times (-\sin x) \quad 5 + 5$$

$$= -\frac{\sin x}{\sqrt{b-b\cos^2 x + a\cos^2 x}} \times \sqrt{b-a} \quad 5$$

$$= -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$$

$$\therefore \int -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + \text{නියතය} \quad 5$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + C,$$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\sin y = \sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x$ and $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-a}{b}}(-\sin x) \text{---------------} (1) \quad 5$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\frac{b-a}{b}\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\frac{b(1-\cos^2 x)+a\cos^2 x}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}{\sqrt{b}} \quad 5$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}} \quad 5$$

පෙර මෙන් අනුකලනය 10

$\boxed{25}$

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88%ක් වන අතර පහසුතා දර්ශකය 38%ක් පමණි.

ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක අවකලනය සහ දාම නීතිය පිළිබඳ දැනුම අවම මට්ටමක පැවතුණි. ව්‍යුත්පන්නය නිවැරදිව ලබා ගත් නමුත් අනුකලනය සඳහා ශ්‍රිතය දී ඇති ආකාරයට ලබා ගැනීමට අපහසුවීම නිසා පිළිතුර සාර්ථකව ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

මේ ආකාරයේ මූලධර්ම අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමෙන් සාර්ථක ප්‍රතිඵල ලබා ගත හැක.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. C වක්‍රයක්, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\cot^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වන පරිදි C වක්‍රය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta \qquad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$; $\dfrac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

5 5

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \dfrac{3\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{-3\sin\theta(1-\cos^2\theta)} = -\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -\cot^3\theta.$ 5

$\dfrac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow \cot\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ 5

$P \equiv \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \equiv \left(\dfrac{5}{2\sqrt{2}}, \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right).$

5

25

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 53%ක් පමණි.

බොහෝ අපේක්ෂකයන් ගැටලුවේ මුල් කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා තිබුණත් අවසාන කොටසේදී අනුක්‍රමණය -1 ආදේශයෙන් θ පරාමිතියේ අගය ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මගහරවා ගතහැක.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x-4y=2$ හා $4x-3y=1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

(i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$\frac{3x-4y-2}{5}=\pm\frac{4x-3y-1}{5}$ මගින් දෙනු ලැබේ. 5

$x+y+1=0$ හෝ $7x-7y-3=0$ 5

l_1 හා $x+y+1=0$ අතර සුළු කෝණය α ලෙස ගන්න.

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}\right| \quad 5$$

$$=7>1, \quad 5$$

$\therefore 7x-7y-3=0$ යනු l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමීකරණය වේ. 5

25

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 87%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 37%ක් පමණි. කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ ලබා ගැනීමේදී + හෝ − ලකුණු දෙකම භාවිත කර නොතිබීම නිසා සමීකරණ 2ක් ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සමීකරණ නිවැරදිව ලබා ගත් නමුත් රේඛා දෙකක් අතර සුළු කෝණය සෙවීමේදී $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ සූත්‍රය නිවැරදිව භාවිත කර නොමැති වීමෙන් සාර්ථක පිළිතුරකට ළඟා වීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මේ පිළිබඳ නිසි අවබෝධයක් ලබාගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. S යනු $x^2+y^2-4=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි ද l යනු $y=x+1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු. S හා l හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$(x^2+y^2-4)+\lambda(y-x-1)=0$, ආකාර වේ. ; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$.

10

$x^2+y^2-\lambda x+\lambda y-\lambda-4=0$.

මෙය S ට ප්‍රලම්භ නම්, $g=0; f=0; c=-4; g'=-\frac{\lambda}{2}; f'=\frac{\lambda}{2}; c'=-\lambda-4$, සමගින්

$2gg'+2ff'=c+c'$ විය යුතුයි. 5

එනම් $0=-\lambda-8$

$\therefore \lambda=-8$. 5

$\therefore$ පිළිතුර $x^2+y^2+8x-8y+4=0$. 5

25

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 84%ක් වන අතර පහසුතාව 33%ක් පමණි.

වෘත්තයක හා සරල රේඛාවක ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $s+\lambda l=0$ ආකාරයට ප්‍රකාශ නොකර වෙනස් ආකාරවලට වෘත්තයේ සමීකරණය සෙවීමට උත්සාහ දරා තිබුණි. $2gg'+2ff'=c+c'$ සමීකරණය නිවැරදිව භාවිත කිරීමට නොහැකි වීමෙන් ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි. වෘත්ත පිළිබඳ සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මෙම දුර්වලතා මග හරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $-\pi < \theta \leq \pi$ සඳහා $\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin\theta$ බව පෙන්වන්න. **ඒ නයින්,** $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ හි අගය ද සොයන්න. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}$$

5

$$= 1 + \sin\theta \quad \left(\because \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 \text{ and } 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta.\right)$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$: යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}.$

$\therefore \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ------------- (1) 5 $\left(\because \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} > 0\right)$

$\theta = \frac{-\pi}{6}$: යැයි ගනිමු.

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

$\therefore \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ------------- (2) $\left(\because \sin\frac{\pi}{12} < \cos\frac{\pi}{12}\right)$ 5

$(1) - (2) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$ 5

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 55%ක් පමණි.

මෙම ගැටලුවේ මුල් කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා තිබුණත් $\cos\frac{\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{12} > 0$ බව අවබෝධ කර නොගැනීම නිසා නිසි පිළිතුර ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි. එලෙස $\theta = -\frac{\pi}{6}$ සඳහා $\cos\frac{\pi}{12} > \sin\frac{\pi}{12}$ හඳුනා නොගැනීමෙන් $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ ට අදාළ අගය ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

වෘත්ත පාද වලදී කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල ලකුණු සම්බන්ධ වන සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බව දී ඇත. $a^2 > 3b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ ද b ඇසුරෙන් $\alpha\beta$ ද ලියා දක්වන්න.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ බව පෙන්වන්න.

$|\alpha + \beta|$ හා $|\alpha - \beta|$ ස්වකීය මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*b*) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න.

p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

5

(*a*) විවේචකය $\Delta = (2a)^2 - 4(3)(b)$

$= 4(a)^2 - 4 . 3b$ 5

$f(x) = 0$ ට තාත්වික ප්‍රභින්න මුල දෙකක් ඇති නිසා, $\Delta > 0$ විය යුතුයි. 5

$\therefore a^2 > 3b$ 5

20

$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$ හා $\alpha\beta = \frac{b}{3}$

5 5

10

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 10

$= \frac{4a^2}{9} - \frac{4b}{3}$ 5

$= \frac{4}{9}(a^2 - 3b)$ 5

$\therefore (\alpha - \beta) = \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}$ 5

25

$\alpha' = |\alpha + \beta|$ හා $\beta' = |\alpha - \beta|$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha' = \frac{2}{3}|\alpha|$ හා $\beta' = \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}$

5

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x - \alpha')(x - \beta') = 0$ වේ. 5

i.e. $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0$ 5

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{3}|a| + \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}\right)x + \frac{4}{9}|a|\sqrt{(a^2 - 3b)} = 0$

5 5

$\Rightarrow 9x^2 - 6\left(|a|\sqrt{(a^2 - 3b)}\right)x + 4\sqrt{(a^4 - 3a^2b)} = 0$ 5

30

(*b*) $g(x)$ යන්න $(x - 1)(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $3x + 2$ වන නිසා,

$g(x) = h(x)(x - 1)(x + 2) + 3x + 2$, - - - - - - - - (1) 10

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය 1 වන බහුපදයකි.

ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(1)$ වේ. 5

$(1) \Rightarrow g(1) = 5$ 5

එනයින් $g(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය 5 වේ.

නැවතත්, ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(-2)$ වේ.

5

$(1) \Rightarrow g(-2) = -4$ 5

එනයින්, $g(x)$ යන්න $(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය -4 වේ.

30

$g(1) = 5 \Rightarrow 1 + p + q + 1 = 5$ 5

$p + q = 3$

$g(-2) = -4 \Rightarrow -8 + 4p - 2q + 1 = -4$ 5

$4p - 2q = 3$

$p = \frac{3}{2}$ හා $q = \frac{3}{2}$

5 5 **20**

---

5 5

දැන් $g(-1) = -1 + p - q + 1 = 0$. $(\because \; p = q)$

එම නිසා සාධක ප්‍රමේයය මගින්, $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. 5 **15**

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) x හි ආරෝහණ බල වලින් $(5+2x)^{14}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$r = 0, 1, 2, \ldots, 14$ සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණයේ x^r අඩංගු පදය T_r යැයි ගනිමු.

$x \neq 0$ සඳහා $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \dfrac{4}{3}$ වන විට, ඉහත ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදය ලබාදෙන r හි අගය සොයන්න.

(*b*) $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \dfrac{1}{(r+c)} - \dfrac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\displaystyle(5+2x)^{14} = \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r}(2x)^r$ 10

$\displaystyle= \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r$, මෙහි $r = 0, 1, \ldots, 14$ සඳහා ${}^{14}C_r = \dfrac{14!}{r!(14-r)!}$

5

15

$r = 0, 1, \ldots, 14$ සඳහා $T_r = {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r$ යැයි ගන්න.

එවිට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{14!\ 5^{13-r}\ 2^{r+1}}{(r+1)!(13-r)!}x^{r+1} \Big/ \dfrac{14!\ 5^{14-r}\ 2^r}{r!(14-r)!}x^r$ 5

10

$= \dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ 5

20

$x=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\dfrac{T_{r+1}}{T_r}=\dfrac{2}{5}\dfrac{(14-r)}{(r+1)}\cdot\dfrac{4}{3}$ 5

$\dfrac{8}{15}\dfrac{(14-r)}{(r+1)}\underset{<}{\geq}1$ වන විට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r}\underset{<}{\geq}1$ ලෙස වේ.

5 5

එවිට $112-8r\underset{<}{\geq}15r+15.$

එවිට $r\underset{>}{\leq}\dfrac{97}{23}=4\dfrac{5}{23}.$ 5

$T_0<T_1<T_2<T_3<T_4<T_5>T_6\cdots>T_{14}$ 10

එම නිසා අවශ්‍ය අගය $r=5$ 5

35

(b) $\dfrac{1}{r+c}-\dfrac{1}{r+c+2}=\dfrac{(r+c+2)-(r+c)}{(r+c)(r+c+2)}$ 5

$=\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)}.$ 5

10

$r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ යැයි ගනිමු.

එවිට

$r=1:\quad u_1=\dfrac{1}{1+c}-\dfrac{1}{3+c}$ 5

$r=2;\quad u_2=\dfrac{1}{2+c}-\dfrac{1}{4+c}$

5

$r=3;\quad u_3=\dfrac{1}{3+c}-\dfrac{1}{5+c}$

$\vdots$

$r=n-2;\ u_{n-2}=\dfrac{1}{n-2+c}-\dfrac{1}{n+c}$ 5

$r=n-1;\quad u_{n-1}=\dfrac{1}{n-1+c}-\dfrac{1}{n+c+1}$ 5

$r=n;\qquad u_n=\dfrac{1}{n+c}-\dfrac{1}{n+c+2}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{1+c} + \frac{1}{2+c} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2} \quad 10$$

$$= \frac{3+2c}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}. \quad 5$$

$\boxed{35}$

දැ.අ.පැ. සීමාව $n \to \infty$ $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$. වේ. 10

$\therefore$ $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී වේ හා ඓක්‍යය $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$. වේ.

5 5

$\boxed{20}$

$c = 0$: දැමීමෙන්, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{3}{4}$. ----------------- (1) 5

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{5}{12}. \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4} \text{ ----------------- (2)}$$

දැන්, (1) හා (2) $\Rightarrow$ $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$. 5

$\boxed{15}$

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ බව දී ඇත; මෙහි $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{B}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වා, a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ සොයන්න.

$\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $\mathbf{PQ} = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අඳින්න.

$z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. $\frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් $z_0, \frac{1}{z_0}, z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

(i) Q හා S ලක්ෂ්‍ය ද C මත පිහිටන බවත්

(ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්ත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත්

පෙන්වන්න.

(*a*)

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$= \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} \quad 10$$

$$AB^T = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+2a=4, \quad 2+ab=1, \quad -1+2a-b=2, \quad -1+b^2=0. \quad 10$$

$$\Leftrightarrow \quad a=1, \qquad b=-1. \quad 5$$

දැන්, $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 5

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

$\boxed{45}$

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$ 10

තවද, $PQ = P^2 + 2I \Leftrightarrow P^{-1}(PQ) = P^{-1}(P^2 + 2I)$ 5

$\Leftrightarrow Q = P^{-1}P^2 + P^{-1}(2I)$ 5

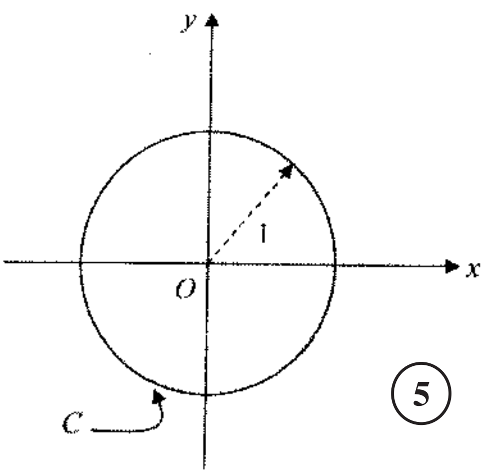
$\Leftrightarrow Q = P + 2P^{-1}$ 5

$\Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ 5

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$ 5

$\boxed{35}$

(*b*)



5

$\boxed{05}$

පළමුව, $\frac{1}{z_0} = \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$ 5

$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{a(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$

$= \frac{1}{a}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ 5

එනයින්, $\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{a}$, සහ $\text{Arg}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -\theta.$

5 5

ඊළඟට, $z_0{}^2 = a^2(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= a^2\left\{(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta\right\}$ 5

$= a^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ 5

එනයින්, $\left|z_0{}^2\right| = a^2$, සහ $\text{Arg}\left(z_0{}^2\right) = 2\theta.$ 5

5

40

P, C මත පිහිටයි යැයි සිතමු.

එවිට $a = 1$ 5

$\therefore \left|\frac{1}{z_0}\right| = 1$ හා Q යන්න C මත පිහිටයි. 5

තවද, $|z_0^2| = 1$ හා එනයින් S යන්න C මත පිහිටයි. 5

15

$z_0 + \frac{1}{z_0} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)$

$= 2\cos\theta.$ 5

$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\cos\theta < 2.$

$z_0 + \frac{1}{z_0}$ මගින් නිරූපනය කරන සංඛ්‍යාව තාත්වික වන අතර තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටයි. 5

10

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

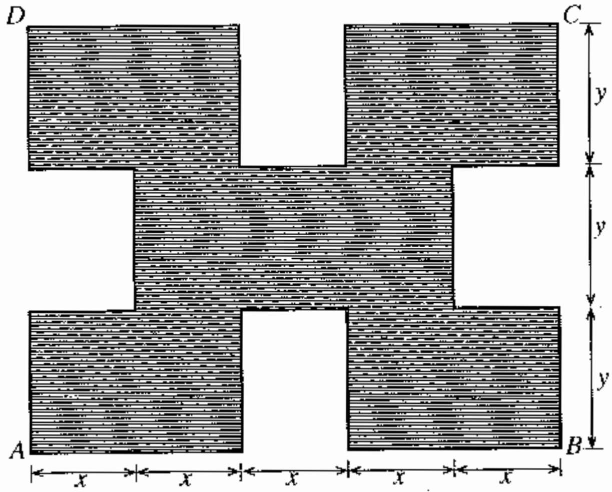
$x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

(*b*) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය 385 m^2 වේ. මෙම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර $5x$ ද පළල මීටර $3y$ ද වූ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග මීටර y ද පළල මීටර x ද වූ සර්වසම සෘජුකෝණාස්‍ර හතරක් ඉවත් කිරීමෙනි. $y = \dfrac{35}{x}$ බව පෙන්වා, අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි මීටරවලින් මනින ලද පරිමිතිය P යන්න $x > 0$ සඳහා $P = 14x + \dfrac{350}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq 1, 2.$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

එවිට $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)2x - x^2(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 10

$= \dfrac{-6x^2 + 4x + 3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 5

$= \dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ ($x \neq 1, 2.$ සඳහා) 5

$\boxed{20}$

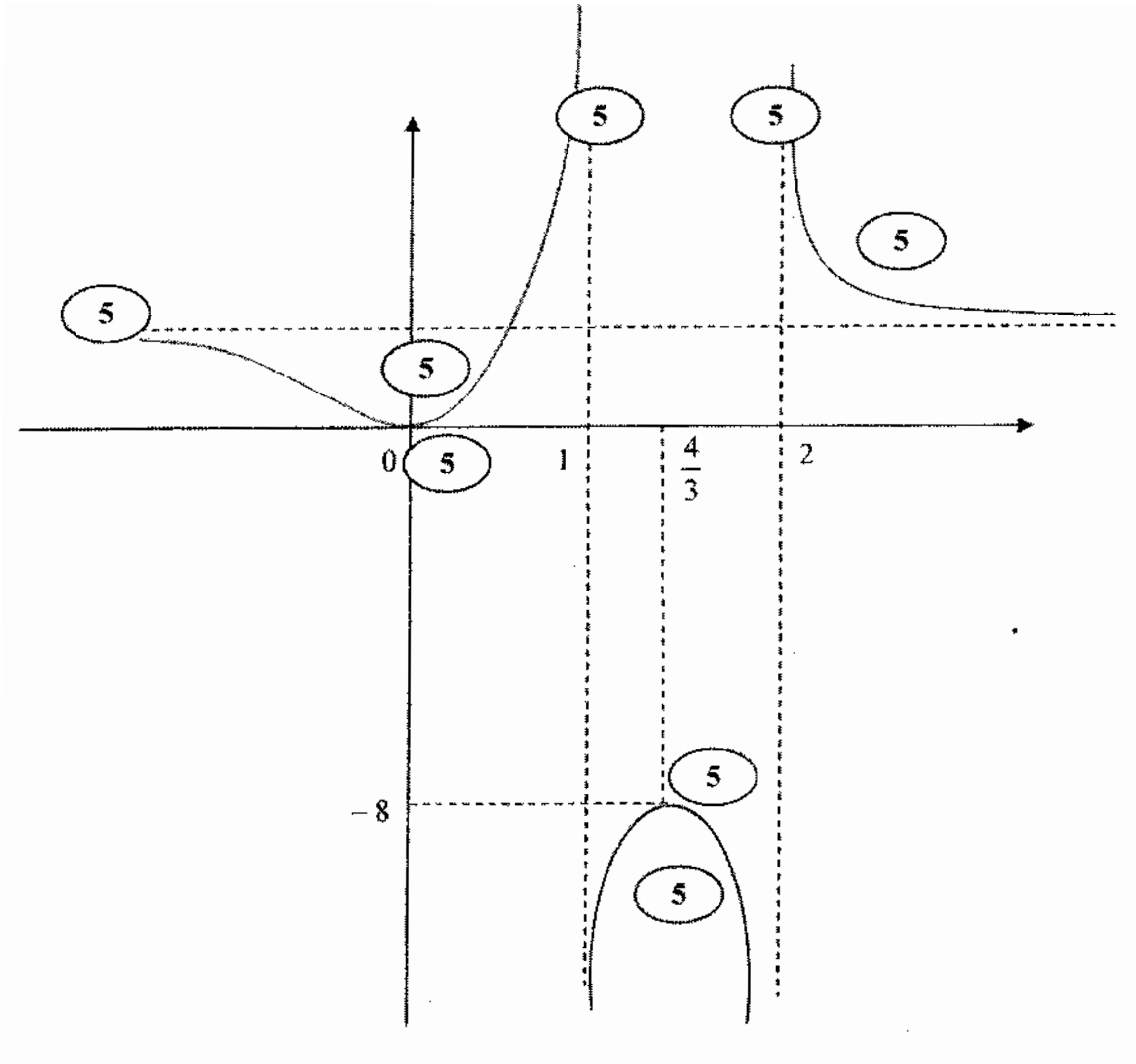
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$ එනයින් එය $y = 1$ වේ.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 1, 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \dfrac{4}{3}.$ 5

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
	5	5	5	5	5



හැරුම් ලක්ෂ දෙකක් පවතී : $(0, 0)$ ස්ථානීය අවමයක් $\left(\frac{4}{3}, -8\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්

5 $x = 0$ හෝ $2 < x < 2$ 5

$\boxed{80}$

(b) වර්ගඵලය : $(5x)(3y) - 4xy = 385$ 5

$$11xy = 385$$

$$xy = 35$$

$$y = \frac{35}{x}.$$ 5

පරිධිය : $P = 2(5x + 3y) + 4x + 4y$ 5

$$= 14x + 10y$$

$$= 14x + \frac{350}{x}; \quad x > 0.$$ 5

$$\frac{dP}{dx} = 14 - \frac{350}{x^2}$$ 5

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{350}{14} = 25$$

5

$\therefore x = 5$ 5

$0 < x < 5$ සඳහා $\frac{dP}{dx} < 0$ හා $5 < x$ සඳහා $\frac{dP}{dx} > 0$ වේ.

5 5

$x = 5$ වන විට P අවමයක් වේ. 5

50

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (a) (i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්,** $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ සොයා, **ඒ නයින්,** $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(b) $c > 0$ හා $I = \displaystyle\int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \dfrac{\pi}{4c}\ln c + \dfrac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \dfrac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(i) $$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$ 10

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : 1 = A$

$x^1 : 0 = 2A + B + C$ 10

$x^2 : 0 = A + B$

$\therefore\ A = 1, B = -1$ සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $C = -1$. 10

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$ 5

15 $= \ln|x| - \ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C'$, මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

$\boxed{50}$

(ii) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$ 10

$-xe^{-x} - e^{-x} + C''$, මෙහි C'' යනු අභිමත නියතයකි. 5

5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_1^2 xe^{-x}dx$ 5

$= -(x+1)e^{-x}\Big|_1^2$ 5

$= 2e^{-1} - 3e^{-2}$. 5

35

(b) $x = c\tan\theta$. යැයි ගනිමු.

එවිට $dx = c\sec^2\theta\, d\theta$.

$x = 0$, විට $\theta = 0$ වන අතර $x = c, \theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

5

එවිට $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2 + c^2\tan^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5

5

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2\sec^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln c + \ln(1+\tan\theta\}d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\ln c\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\{1+\tan\theta\}d\theta$

$= \frac{1}{c}\ln c \cdot \theta\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{c}J$ 5

$= \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J$. 5

35

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)d\theta \quad 5$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left\{1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right\}d\theta \quad 5$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{(1+\tan\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\ln 2-\ln(1+\tan\theta)\}d\theta \quad 5$$

$$=\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}-J$$

$$\therefore J=\frac{\pi}{8}\ln 2. \quad 5$$

$$\therefore I=\frac{\pi}{4c}\ln c+\frac{1}{c}\frac{\pi}{8}\ln 2 \quad 5$$

$$=\frac{\pi}{8c}\{2\ln c+\ln 2\}$$

$$=\frac{\pi}{8c}\ln(2c^2). \quad 5$$

30

16 වන ප්‍රශ්නය

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන l සරල රේඛාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

l ට ලම්බව P හරහා වූ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, P සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(\dfrac{m}{1+m^2}, \dfrac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විචලනය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පථයේ දළ සටහනක් xy-තලයෙහි අඳින්න.

තව ද $R \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

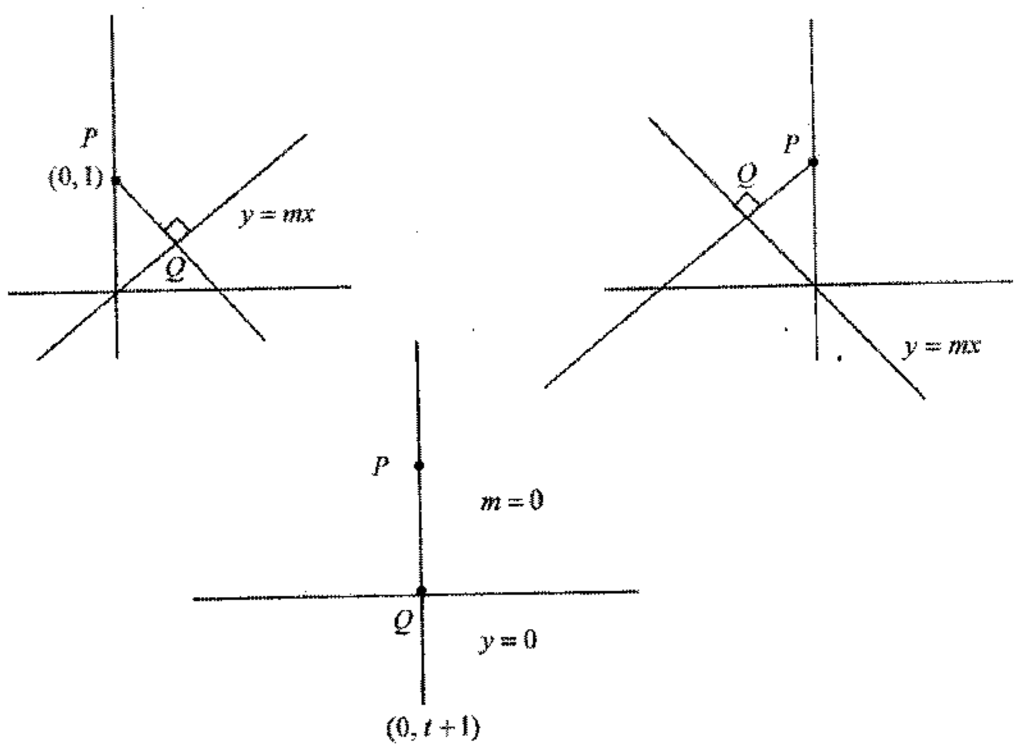
R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා x-අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටන S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' හි කේන්ද්‍රයම කේන්ද්‍රය ලෙස ඇතිව S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

$(0,1)$ ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි නම් එවිට $1 = m \times 0$ ලෙස විය යුතුයි. i.e. $1 = 0$. මෙය 5

විසංවාදයකි. 5

$\therefore$ $(0,1)$ යන්න l මත නොපිහිටයි. $\boxed{10}$



(i) අවස්ථාව : $m \neq 0$

මෙම අවස්ථාවේදී, P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය පහත ආකාර වේ.

$y-1 = -\frac{1}{m}(x-0).$ **10**

මෙම සමීකරණයට t හඳුන්වාදීමෙන් $y-1 = -\frac{1}{m}(x-0) = t$ (යැයි කියමු) **5**

එවිට $y = t+1$ හා $x = -mt$, මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

5 **5**

එනයින්, 1 ට ලම්බ P හරහා යන රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක

$(-mt,\ t+1)$, ආකාර ගනියි. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

(ii) අවස්ථාව : $m = 0$

මෙම අවස්ථාවේදී, P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය $y-$ අක්ෂය වන අතර

එනයින් එය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(0,\ t+1)$ ආකාර ගනියි. මෙහි t යනු

පරාමිතියක් එම නිසා සියලු t අගයන් සඳහා මෙම ආකාරය සත්‍ය වේ. **5**

30

---

t_0 යනු Q ට අනුරූප අගය t ලෙස ගනිමු.

Q යන්න l, මත පිහිටන නිසා $t_0 + 1 = m(-mt_0)$ **5**

5

$\therefore\ t_0 = -\frac{1}{1+m^2}$, සහ එනයින් $Q = \left(-m\left(-\frac{1}{1+m^2}\right), -\frac{1}{1+m^2}+1\right)$ **5**

$$= \left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right).$$ **5**

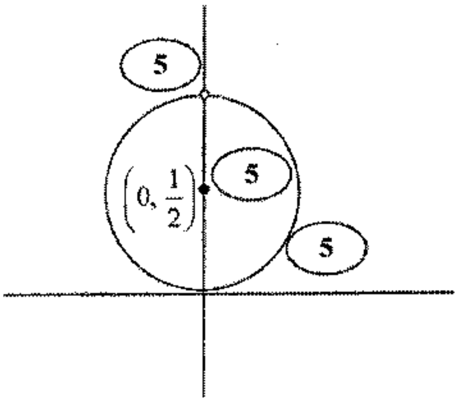
20

$x = \dfrac{m}{1+m^2}$, $y = \dfrac{m^2}{1+m^2}$ යන්න x^2+y^2-y හි ආදේශයෙන් 5

$x^2+y^2-y = \dfrac{m^2}{(1+m^2)^2} + \dfrac{m^4}{(1+m^2)^2} - \dfrac{m^2}{1+m^2} = \dfrac{m^2(1+m^2)}{(1+m^2)^2} - \dfrac{m^2}{1+m^2} = 0.$ 5

5

එනයින් Q යන්න S මත පිහිටයි. 5



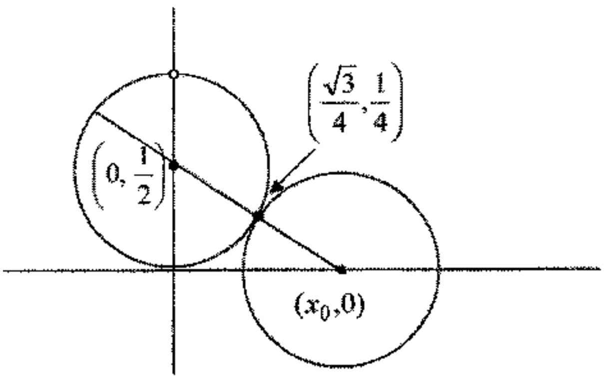
35

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; හා $y = \dfrac{1}{4}$ යන්න $x^2+ y^2 - y$ හි ආදේශයෙන් 5

$x^2+y^2-y = \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{4} = 0.$ 5

S මත $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ පිහිටයි. 5

15



එවිට x_0 යනු S' හි කේන්ද්‍රයේ

x හි ඛණ්ඩාංක ලෙස ගන්න.

$$\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}. \quad 5$$

5 5

$$\Rightarrow \quad x_0^2+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}. \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 5$$

එනයින් S' හි සමීකරණය $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2$. 5

i.e. $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

30

S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$. 10

10

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\dfrac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$වේ. $A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\dfrac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.

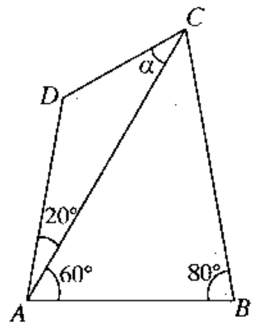
මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot\alpha = \dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.



(*b*) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) (i) $\dfrac{2\left\{\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\} - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}.$ 5 5 5

15

(ii) සයින් නීතිය භාවිතයෙන් : $\dfrac{AC}{\sin 80°} = \dfrac{AB}{\sin 40°}.$ 10

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2\sin 40° \cos 40°}{\sin 40°} = 2\cos 40°$ 5 5 5

නැවතත් සයින් නීතිය භාවිතයෙන් : $\dfrac{AC}{\sin(\alpha + 20°)} = \dfrac{AD}{\sin\alpha}.$ 10

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ 5

එනයින්, $AB = AD \Rightarrow \dfrac{\sin(20^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = 2\cos 40^\circ.$ 5

5

$\therefore \quad \sin(20^\circ + \alpha) = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$

$\Rightarrow \quad \sin 20^\circ\cos\alpha + \cos 20^\circ\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$ 5

$\Rightarrow \quad \cot\alpha = \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ 5

$\boxed{60}$

10

$\theta = 20^\circ \Rightarrow$ සමගින් (i) $\Rightarrow \quad \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$ 5

$\therefore \cot\alpha = \sqrt{3}$ 5

5

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ.$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ නිසා)

$\boxed{25}$

(b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = \cos 2x - \cos 4x$ 5

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\sin x = 2\sin 3x\sin x$

5 5

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos 3x - \sin 3x) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\cos 3x = \sin 3x$ 5

5

5 5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\tan 3x = 1$ $(\because \cos 3x \neq 0)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Leftrightarrow x = n\pi$ හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $3x = m\pi + \dfrac{\pi}{4}$ 5

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Leftrightarrow x = n\pi$ හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = \dfrac{m\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}$ 5

$\boxed{50}$
