2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක දෙසට එකම u වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $2m$ හා m වූ A හා B අංශු දෙකක් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු A අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ බව ද ගැටුම නිසා B මත යෙදෙන ආවේගයෙහි විශාලත්වය $2mu$ බව ද පෙන්වන්න.

පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow \quad 0 = [2m(0) + mv] - [2mu - mu]$ 5

$\Rightarrow mv = mu$

$\Rightarrow v = u$ 5

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන් : $v - 0 = -e(-u - u)$ 5

$u = e(2u)$

$e = \frac{1}{2}$ 5

B පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow$ ආවේගය $= mv - m(-u)$

$= mu + mu = 2mu.$ 5

25

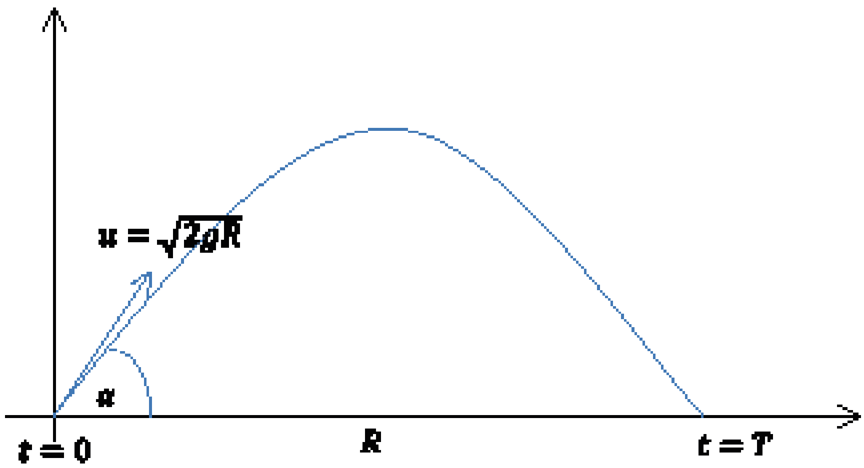
---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 96% ක් පමණ වේ. ආවේගී ගැටුමක් නිසා සිදුවන ගම්‍යතා පරිවර්තනය හේතුවෙන් ප්‍රවේගයේ ඇති වන වෙනස සෙවීම හා නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය නිවැරදිව යොදා ගැනීම පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙම ගැටලුවේ අරමුණ වේ. ගැටලුවේ පහසුතාවය 67% කි. ගැටලුවේ $2m$ වෙනුවට m යොදා ගැනීමට තරම් සිසුන් නොසැලකිලිමත්ව තිබුණි. $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීම වුවද රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිතිය ඇසුරෙන් ද විසඳීමට යොමුව තිබිණි. නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය නිවැරදිව යොදා ගැනීමේ අපහසුතා ද සිසුන් තුළ තිබුණි. මූලධර්ම තහවුරු වන සේ සරල ගැටලු මූලිකව ඉදිරිපත් කර මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැක.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. තිරස් බිම මත වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් $u=\sqrt{2gR}$ ආරම්භක වේගයෙන් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; මෙහි R යනු, බිම මත ප්‍රක්ෂිප්තයේ තිරස් පරාසය වේ. තිබිය හැකි ආරම්භක ප්‍රක්ෂේපණ දිශා දෙක අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



$S=ut+\frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්, පියාසර කාලය T :

$\uparrow \quad 0=(u\sin\alpha)T-\frac{1}{2}gT^2 \quad \Rightarrow T=\frac{2u\sin\alpha}{g}$ 5

$\rightarrow \quad R=(u\cos\alpha).\,T=\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ 5

$R=2R\sin2\alpha; \quad \sin2\alpha=\frac{1}{2}$ 5

$$2\alpha=\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$$

ප්‍රක්ෂේපණය කළ හැකි කෝණ දෙක :

$\alpha_1=\frac{\pi}{12}$ සහ $\alpha_2=\frac{5\pi}{12}$, 5

$\therefore \quad \alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{12}(5-1)=\frac{\pi}{3}$ 5

25

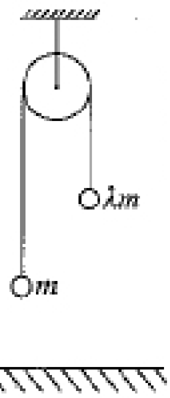
2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

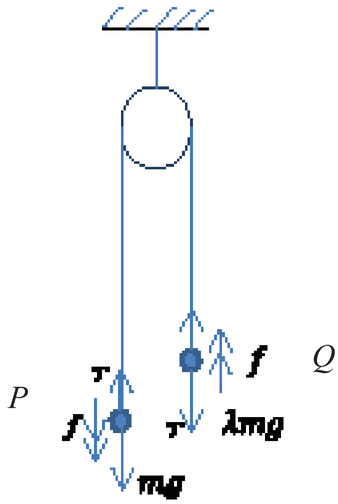
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණ වේ. ප්‍රක්ෂිප්තයක චලිතය අධ්‍යයනය කිරීම මෙයින් අපේක්ෂිත අතර එහි පහසුතාව 39% ක් තරම් පහත මට්ටමක විය. ප්‍රගතික සමීකරණය භාවිතය සතුටුදායක මට්ටමකට තිබුණ ද එහි ප්‍රතිඵල විශ්ලේෂණය කිරීම දුර්වල මට්ටමක පැවතිණි. සාම්ප්‍රදායික ගැටලු විසඳීම වෙනුමට සුළු වශයෙන් ලද පිළිතුර ප්‍රායෝගිකව විමර්ශනය සඳහා සිසුන්ට මඟ පෙන්වීම හා නිදසුන් ඉදිරිපත් කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැක.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශුවක් අචල, සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලබයි. P අංශුව $\frac{g}{2}$ ත්වරණයකින් පහළට චලනය වේ. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව තිරස් **අප්‍රත්‍යාස්ථ** ගෙබිමක v වේගයෙන් ගැටෙයි නම් හා Q අංශුව කිසිවිටෙකත් කප්පිය කරා ළඟා නොවේ නම්, P අංශුව බිම ගැටුණු මොහොතේ සිට Q අංශුව උපරිම උසට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය සොයන්න.





$\underline{F = ma}$ යෙදීමෙන්,

P සඳහා : $\downarrow$ $mg - T = m\left(\frac{g}{2}\right)$ ———— (1) 5

Q සඳහා : $\uparrow$ $T - \lambda mg = \lambda m\left(\frac{g}{2}\right)$ ———— (2) 5

$$(1)+(2) \Rightarrow (1-\lambda)mg = (1+\lambda)m(g/2) \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad 2(1-\lambda) = (1+\lambda)$$

$$\lambda = \frac{1}{3}. \quad 5$$

Q ට, එහි උපරිම උසට ළඟා වීමට ගතවන කාලය t යන්න

$0 = v - g\,t$ මගින් දෙනු ලබයි.

$\Rightarrow t = \frac{v}{g}.$ 5

25

---

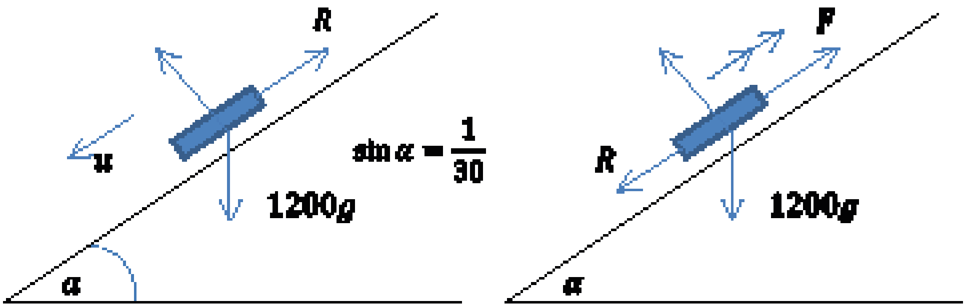
3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 94% කි. නිව්ටන්ගේ චලිත නියම පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර මෙහි පහසුතාව 63% කි. පිළිතුර ලබා ගැනීමේ අරමුණින්, පද්ධතියටම එක්වර $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන් පිළිතුර ලැබුණ ද ක්‍රමවේදයේ මූලධර්ම දෝෂ නිසා ලකුණු අහිමි වී තිබුණි. මුල් චලිතය අවසන දී සිදුවන නව චලිතයට අනුරූපව මූලධර්ම නිවැරදිව යොදා ගැනීම් දුර්වලතාවය නිසා පහසුතාව අඩුවී සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා නොතිබිණි. මෙවැනි ආකෘතියක ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැක.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්කන්ධය 1200 kg වූ කාරයක් එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර තිරසට α කෝණයක් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ පහළට යම් නියත වේගයකින් චලනය වේ; මෙහි $\sin\alpha = \frac{1}{30}$ වේ. ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගනිමින් කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධය නිව්ටන වලින් සොයන්න.

කාරය, එම ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව $\frac{1}{6} \text{ m s}^{-2}$ ත්වරණයක් සහිත ව එම පාරම දිගේ ඉහළට ගමන් කරන විට, එහි වේගය 15 m s^{-1} වන මොහොතේ දී එන්ජිමේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.



R ප්‍රතිරෝධය පමණක් යටතේ මෝටර් රථය පහළට චලනය වන විට,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\swarrow \quad 1200\, g \sin\alpha - R = 0$ 5

$\Rightarrow \quad R = 1200(10)\left(\frac{1}{30}\right) = 400 \text{ N.}$ 5

මෝටර් රථය ඉහළට චලනය වන විට, එහි ප්‍රකර්ෂණ බලය F යැයි ගනිමු.

$\nearrow \quad F - R - 1200\, g \sin\alpha = 1200\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow F = 1000 \text{ N}$

5

එනයින්, ජවය $P = FV = 15\ (1000)$ W 5

$P = 15$ kW 5 **25**

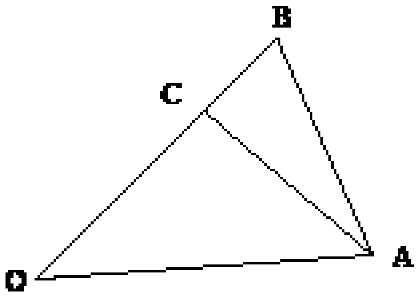
---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් උත්සාහ කර ඇත්තේ 94% ක් පමණි. $\underline{F} = m\underline{a}$ යන සම්මත සමීකරණය යෙදීම පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 60% කි. ඒකක පරිවර්තනය සිදු නොකර පිළිතුර ලියා තැබීම හා $\underline{F} = m\underline{a}$ සමීකරණය ඉහළට යෙදීමේදී බරෙහි සංරචකය නිවැරදි යොදා නොතිබීම පහසුතාව අඩුවීමට හේතු වී තිබිණි. ඒකක පරිවර්තනය හා එම ස්වරූපයේ ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් හා ප්‍රශ්නය කියවන විට ඒකක පිළිබඳ ව විමසිලිමත් වීම/ සිසුන් විමසිලිමත් කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාවය මඟ හරවා ගත හැකිය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $3\mathbf{i}$ හා $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි OB සරල රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකය $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.



$\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

එවිට, $\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OB}) = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ වේ. මෙහි λ අදිශයකි.

5

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA}$ ට ලම්බ බැවින්,

$\lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}).\{-\lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + 3\mathbf{i}\} = 0$ 5

5

$6 - 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{13}$ 5

$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{18}{13}\mathbf{j}.$ 5

25

---

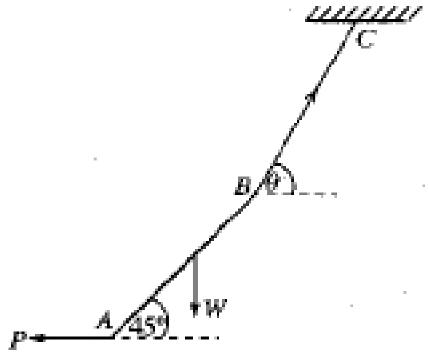
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

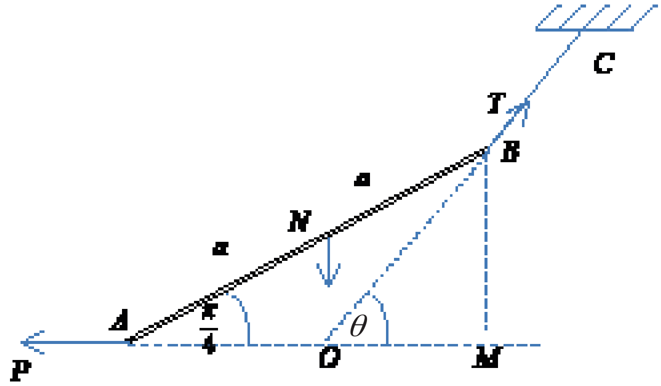
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% කි. දෛශික දෙකක සමාන්තරතාවය හා දෛශික තිත් ගුණිතය පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර පහසුතාවය 22% කි. දෙන ලද දත්ත ගැටලුවට අවශ්‍ය ආකාරයට යොදා ගැනීමේ සිදුවූ දුර්වලතා නිසා පහසුතාව ඉතාමත් අඩු වීමට හේතු වී ඇත. සමාන ආකාරවල ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. දිග $2a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක්, BC සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා A කෙළවරේ දී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවේ අල්වා තබා ඇත. දණ්ඩ, තිරස සමග $45°$ කෝණයක් සාදන බව දී ඇත්නම්, BC තන්තුව තිරස සමග සාදන θ කෝණය $\tan\theta = 2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය W ඇසුරෙන් සොයන්න.





BMO බල ත්‍රිකෝණයකි.

$$BM = \frac{2a}{\sqrt{5}};\quad OM = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad 5$$

$$\tan\theta = \frac{BM}{OM} = \frac{2a/\sqrt{5}}{a/\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta = 2$$

$$\uparrow \quad T\sin\theta - W = 0 \quad 5$$

$$T = \frac{W}{\sin\theta} = \frac{W\sqrt{5}}{2} \quad 5 \quad \left(\because \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

5

25

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86% ක් පමණි. ලක්ෂ්‍යයකදී ක්‍රියා කරන බල තුනක සමතුලිතතාවය යටතේ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර පහසුතාව 47% ක් පමණි. බල ලකුණු කිරීමේ දුර්වලතා පැවතීමත් බල ත්‍රිකෝණය භාවිතයෙන් විසඳීමට උත්සාහ කර ඇති අපේක්ෂකයන් බල ත්‍රිකෝණය නිවැරදිව හඳුනා නොගැනීමත් හේතුවෙන් පහසුතාව අඩු වී ඇත. සරල ක්‍රම වලින් බැහැරව බල විභේදනය හා සමීකරණ සුළු කිරීමට යාමෙන් අසාර්ථක වී ඇත. නිවැරදි ලෙස බල සටහන් ඇඳ ගැනීම සහ ඒවාට අනුරූප සරල ක්‍රම (බල ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයය, ලාමි ප්‍රමේයය) මගින් ගැටලු විසඳීමට හුරු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු S නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{4}$ හා $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ වේ. $P(A|B'), P(A'\cap B')$ හා $P(B'|A')$ සොයන්න; මෙහි A' හා B' මගින් පිළිවෙළින් A හා B සිද්ධිවල අනුපූරක සිද්ධි දැක්වේ.

සිද්ධි වල සම්භාවිතා :

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B') + P(A\cap B) = P(A)$$

$$P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \quad 5$$

මේ අනුව,

$$P(A \backslash B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A\cap B')}{1-P(B)} = \frac{1/6}{3/4}=\frac{2}{9} \quad 5$$

$$P(A'\cap B') = P((A\cup B)') = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) \quad 5$$

$$= 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12} \quad 5$$

$$P(B' \backslash A') = \frac{P(A'\cap B')}{P(A')} = \frac{7/12}{1-1/3}=\frac{7/12}{2/3}=\frac{7}{8} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 89% ක් පමණි. අනුපූරක සිද්ධි ආශ්‍රිත සම්භාවිතා ප්‍රමේයයන් භාවිත කිරීම හා අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 54% කි. අනුපූරක සිද්ධිවල සම්භාවිතා හා අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතා ප්‍රතිඵල ආශ්‍රිත සමීකරණ දෝෂ සහිතව ලිවීම නිසා පිළිතුරු වෙත ළඟා වීමේ අපහසුතා දක්නට ලැබිණි.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන වූ රතු බෝල 4 ක් හා කළු බෝල 3 ක් මල්ලක අඩංගු වේ. වරකට එක බැගින් ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව, බෝල හතරක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.
(i) ඉවතට ගනු ලබන බෝල එකම පාටින් යුක්ත වීමේ,
(ii) ඕනෑම අනුයාත ඉවතට ගැනීම් දෙකක දී ඉවතට ගනු ලබන බෝල වෙනස් පාටින් යුක්ත වීමේ,
සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) සියල්ල රතු : $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{35}$ 5

සියල්ල කළු : විය නොහැක.

$\therefore$ පිළිතුර $=\frac{1}{35}$ 5

(ii) $RBRB : \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$ 5

$BRBR : \frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{35}$ 5

$\therefore$ පිළිතුර $=\frac{3}{35}+\frac{3}{35}=\frac{6}{35}$ 5

$\boxed{25}$

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 87% ක් පමණි. මෙයද සම්භාවිතාව පිළිබඳ සරල ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාවය 26% ක් පමණි. (i) කොටසේ පිළිතුරු බොහෝ සිසුන් ලබාගෙන තිබුණ ද (ii) කොටසේ බොහොමයක් පිළිතුරු අසාර්ථක වී තිබුණි. ගැටලුව නිසියාකාරව අවබෝධ කර නොගැනීම අසාර්ථක විසඳුම් ලැබීමට හේතු වී තිබුණි. සමාන ආකාරයේ ගැටලු ඉදිරිපත් කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවය මඟ හරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. එක එකක් 8 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට එක මාතයක් පමණක් ඇත. ඒවායේ මධ්‍යනාය්‍යය, මාතය හා මධ්‍යස්ථය 6:10:5 අනුපාතවලට පිහිටයි. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

මාතය $2a$ යැයි ගනිමු.

එවිට, දී ඇති ධන නිඛිල : $b, c, a, 2a, 2a$ 5

මධ්‍යනාය්‍යය : මාතය $= 6 : 10$

$$\therefore \frac{10(b + c + 5a)}{5} = 6 \times 2a$$ 5 5

$$\Rightarrow b + c = a$$

$\therefore$ දී ඇති නිඛිල වන්නේ $1, 2, 3, 6, 6$ 10

25

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 76% ක් පමණි. අසමූහිත දත්ත ආශ්‍රිත කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිනුම් පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාවය 12% ක් පමණි. දී ඇති දත්තයන්ට යටත්ව සංඛ්‍යා හඳුනා ගැනීමට නිවැරදි තර්ක ගොඩ නැඟීමට නොහැකි වීම මෙම ගැටලුවට ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වීමට හේතුව වේ.

කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිනුම් ආශ්‍රිත විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාවන් අවම කර ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. එක්තරා නගරයක උෂ්ණත්වය දින 20ක් සඳහා දිනපතා වාර්තාගත කරන ලදී. මෙම දත්ත කුලකය සඳහා මධ්‍යන්‍යය μ හා සම්මත අපගමනය σ පිළිවෙළින් 28 °C හා 4 °C ලෙස ගණනය කර තිබුණි. කෙසේ නමුත් ඉහත උෂ්ණත්වවලින් දෙකක් 35 °C හා 21 °C ලෙස වැරදියට ඇතුළත් කර ඇති බව සොයා ගැනීමෙන් පසුව ඒවා 25 °C හා 31 °C ලෙස නිවැරදි කරන ලදී. μ හා σ හි නිවැරදි අගයන් සොයන්න.

$$\mu = 28, \qquad \sigma_1 = 4$$

නිවැරදි කළ දත්ත : $35 \rightarrow 25(-10)$

$$21 \rightarrow 31(+10)$$

$\therefore$ ඓක්‍යය නොවෙනස්ව පවතී.

$\therefore$ $\mu = 28$ ම වේ. (5)

පැරණි $\sum x_i^2 = 20 \times \sigma_1^2 + 20\mu^2 = 20(4^2 + 28^2)$ (5)

නව $\sum x_i^2 =$ පැරණි $\sum x_i^2 - 35^2 - 21^2 + 25^2 + 31^2$ (5)

$$= 20(4^2 + 28^2) - 8 \times 10 \quad (5)$$

නව $\sigma^2 = \dfrac{20(28^2 + 4^2) - 8 \times 10 - 20 \times 28^2}{20}$

$$= \frac{20 \times 16 - 20 \times 4}{20}$$

$$= 12$$

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma = \sqrt{12}$ (5)

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

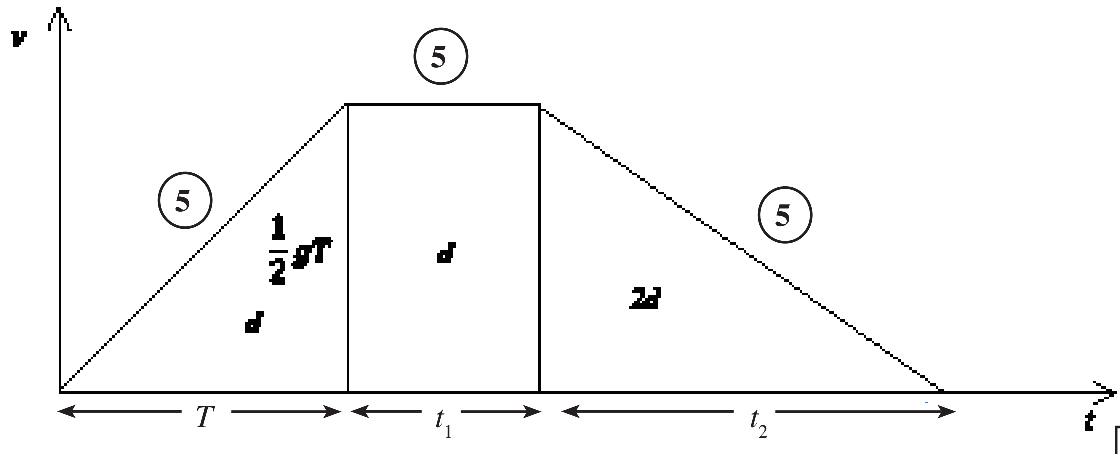
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 72% ක් පමණි. දෝෂ සහිත දත්ත භාවිතයෙන් ගණනය කරන ලද මිනුම් නිවැරදි කර ගැනීම මෙම ගැටලුවෙන් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 15% ක් පමණි. දත්තයන්ගේ වර්ගවල නිවැරදි එකතුව ලබා ගැනීමේදී දෝෂ සිදුවී තිබුණි. එබැවින් විචලතාවය නිවැරදිව ගණනය කර ගැනීමට අපහසුව තිබුණි. සාම්ප්‍රදායික ගැටලු විසඳීම්වලට පරිබාහිරව මෙවැනි දත්ත සැකසීම් ආශ්‍රිත සරල ගැටලු වෙත සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවන් අවම කර ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) මීටර $4d$ ගැඹුරු පතලක චලනය වන සෝපානයක් $t = 0$ කාලයේ දී A ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවේ සිට සිරස් ව පහළට චලනය වීමට පටන් ගනී. එය, පළමුව $\frac{g}{2}$ m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන් මීටර d දුරක් චලනය වී ඊළඟට එම චලිතය අවසානයේ ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන් තව මීටර d දුරක් චලනය වේ. සෝපානය ඉන්පසු A සිට මීටර $4d$ දුරක් පහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙන පරිදි නියත මන්දනයකින් ඉතිරි දුර ද චලනය වේ.
සෝපානයෙහි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින්, A සිට B දක්වා පහළට චලිතය සඳහා සෝපානය ගනු ලබන මුළු කාලය සොයන්න.

(*b*) පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයකින් උතුරු දිශාවට නැවක් යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී නැවේ සිට, දකුණෙන් නැගෙනහිරට β කෝණයකින්, **නැවේ පෙතෙහි සිට** p km දුරකින් B_1 බෝට්ටුවක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. මෙම මොහොතේ දී ම, B_2 බෝට්ටුවක් නැවේ සිට බටහිරින් q km දුරකින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. බෝට්ටු දෙකම පොළොවට සාපේක්ෂව $v(>u)$ km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙත්වල, නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි. පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවල පෙත් නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.
පොළොවට සාපේක්ෂව B_1 බෝට්ටුවේ පෙත උතුරෙන් බටහිරට $\beta - \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right)$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වා, පොළොවට සාපේක්ෂව B_2 බෝට්ටුවේ පෙත සොයන්න.
$\beta = \frac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$ යැයි ගනිමු. $3q^2 > 8p^2$ නම්, B_1 බෝට්ටුව B_2 බෝට්ටුවට පෙර නැව අල්ලා ගන්නා බව පෙන්වන්න.



15

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right) T \quad \text{-----------------------} \quad (1) \quad 5$$

$$d = \left(\frac{1}{2}gT\right) t_1 \quad \text{-----------------------} \quad (2) \quad 5$$

(1) හා (2) $\Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$ 5

$2d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right) \cdot t_2$ 5

(1) හා (3)

$\Rightarrow t_2 = 2T$ 5

(1) $\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4d}{g}}$ 5

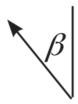
සම්පූර්ණ කාලය $= T + t_1 + t_2$

$= T + \frac{T}{2} + 2T = \frac{7T}{2} = 7\sqrt{\frac{d}{g}}$ 5

$\boxed{35}$

(*b*) $\underline{V}(S, E) = u \uparrow$

$\underline{V}(B_i, E) = v \qquad i = 1, 2$

$\underline{V}(B_1, S) =$ 

සහ 10

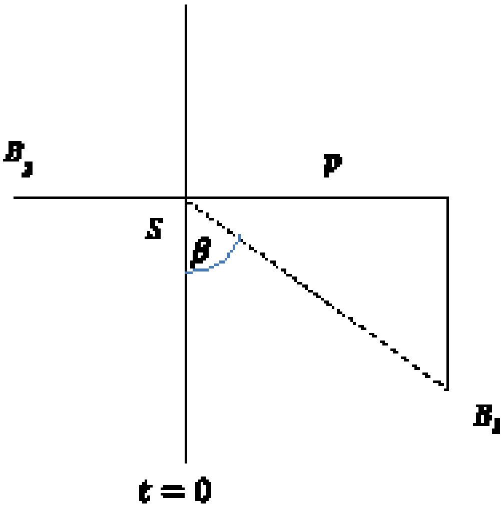
$\underline{V}(B_2, S) = \longrightarrow$

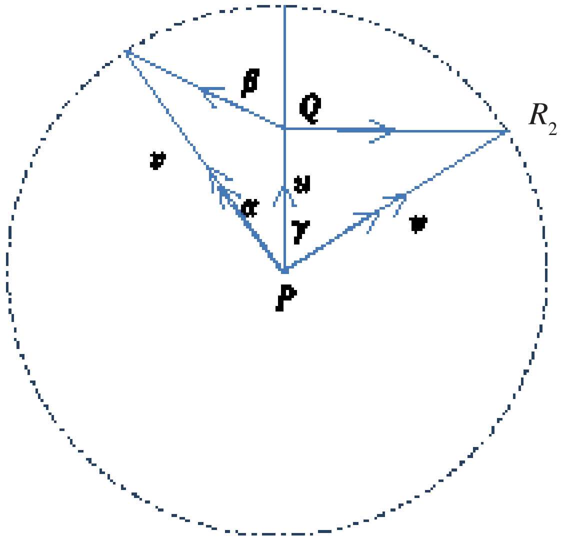
$\underline{V}(B_i, E) = \underline{V}(B_i, S) + \underline{V}(S, E)$ 10

$= \underline{V}(S, E) + \underline{V}(B_i, S)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i} \qquad i = 1, 2$





PQR_1 ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\dfrac{v}{\sin\beta} = \dfrac{u}{\sin(\beta-\alpha)}$ 5

$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{u\sin\beta}{v}$$

$$(\beta-\alpha) = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right)$$

$$\alpha = \beta - \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right) \text{ ---------- (i)}$$ 5

∴ B_1 හි පෙත උතුරෙන් බටහිරට සාදන α කෝණය (i) මගින් දෙනු ලැබේ.

අනුරූපව B_2 හි පොළවට සාපේක්ෂව පෙත උතුරෙන් නැගෙනහිරට γ කෝණයක් සාදයි. මෙහි

$\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{u}{v}\right)$. 5

65

(ii) දෙන ලද : $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$.

එවිට

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}u}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$ 5

$\therefore\ PQ = QR_1$

$\Rightarrow V(B, S) = u.$ 5

B_1 සාපේක්ෂ පථය ඔස්සේ

B_1 ට දුර $= \dfrac{2p}{\sqrt{3}}$ 5

B_1 ට කාලය $t_1 = \dfrac{\frac{2p}{\sqrt{3}}}{u} = \dfrac{2p}{\sqrt{3}u}.$ 5

B_2 ට කාලය $t_2 = \dfrac{q}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \dfrac{q}{u\sqrt{3-1}} = \dfrac{q}{\sqrt{2}u}.$ 5

$t_1 < t_2$ නම් B_1 , B_2 ට පෙර S අල්ලා ගනී. 5

එනම් $\dfrac{2p}{\sqrt{3}u} < \dfrac{q}{\sqrt{2}u}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}p < \sqrt{3}q$

$\Rightarrow 8p^2 < 3q^2.$ 5

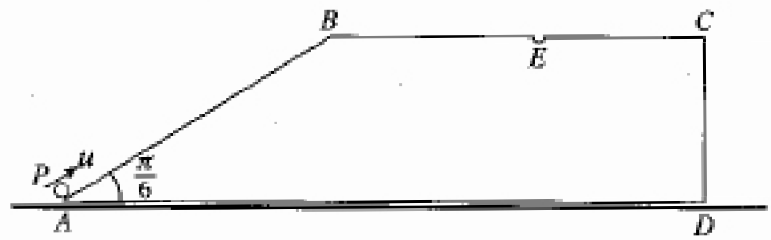
$\boxed{35}$

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) $AB = a$ හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$ වන පරිදි වූ රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ තුපීසියම, ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩකි. AD හා BC රේඛා සමාන්තර වන අතර AB රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවකි. AD අයත් මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට $\overrightarrow{AB}$ දිගේ u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි; මෙහි $u^2 = \frac{7ga}{3}$ වේ. කුට්ටියට සාපේක්ෂව P හි මන්දනය $\frac{2g}{3}$ බව පෙන්වා, P අංශුව B කරා ළඟා වන විට, කුට්ටියට සාපේක්ෂව P අංශුවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

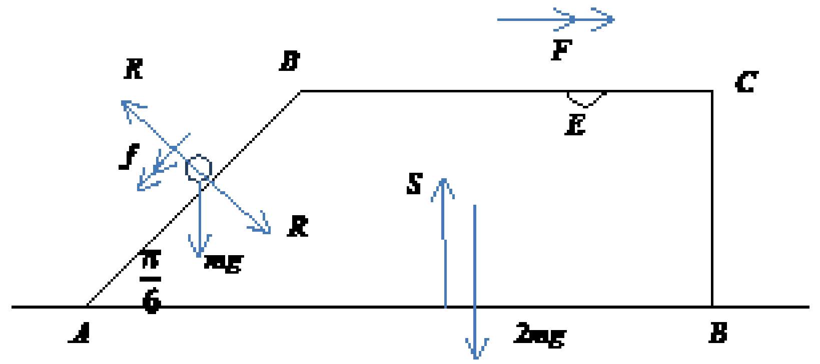
තව ද $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ වන පරිදි කුට්ටියෙහි උඩත් මුහුණතෙහි BC මත වූ E ලක්ෂ්‍යයේ කුඩා සිදුරක් ඇත. කුට්ටියට සාපේක්ෂව චලිතය සැලකීමෙන්, P අංශුව E හි ඇති සිදුරට වැටෙන බව පෙන්වන්න.



(*b*) දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට සිරස් ව පහළින් නිශ්චලව එල්ලී තිබෙන අතර එයට විශාලත්වය $u = \sqrt{kag}$ වූ තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $2 < k < 5$ වේ. තන්තුව θ කෝණයකින් හැරී තවමත් නොබුරුල්ව තිබෙන විට අංශුවේ v වේගය $v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

$\theta = \alpha$ වන විට තන්තුව බුරුල් වන බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි $\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$ වේ.



10

$\underline{a}(P,W) = \underline{f}$ ↙ $\qquad \underline{a}(W,E) = \underline{F}$ → 5

$\underline{F} = m\underline{a}$

පද්ධතියට $\rightarrow 0 = m\left(-f\cos\frac{\pi}{6} + F\right) + 2mF$ 15

5

$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f + 3F \Rightarrow \frac{\sqrt{3}f}{6} = F$

P සඳහා $\swarrow$ $mg\cos\frac{\pi}{3} = m\left(f - F\cos\frac{\pi}{6}\right)$ (10)

$$\frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}f}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}f$$

$$\Rightarrow f = \frac{2g}{3}.$$

කුට්ටියට සාපේක්ෂව B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය චලිතය v යැයි ගනිමු.

$v^2 = u^2 + 2as$ භාවිතයෙන්

$$v^2 = u^2 - 2\left(\frac{2g}{3}\right)a$$ (5)

$$= \frac{7ga}{3} - \frac{4ga}{3}$$

$$v = \sqrt{ga}$$ (5)

65

AB මුහුණතින් ඉවත්වීමෙන් පසු, කුට්ටියට සාපේක්ෂව අංශුවේ චලිතය සඳහා

$\underline{a}(P, W) = \underline{a}(P, E) + \underline{a}(E, W)$

$= \downarrow g + \underline{0}$ ($\because$ කුට්ටිය නියත ප්‍රවේගයෙන් චලිත වන බැවින්)

$= \downarrow g.$ (10)

කුට්ටියේ උඩත් මුහුණතට නැවත ළඟා වීමට P අංශුව ගනු ලබන කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

එවිට $\uparrow$ $0 = v\sin\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}gt^2$ (5)

$$= \frac{v}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{a}{g}}.$$ (5)

R යනු කුට්ටියේ උඩත් මුහුණත මත තිරස් සාපේක්ෂ විස්ථාපනය යැයි ගනිමු.

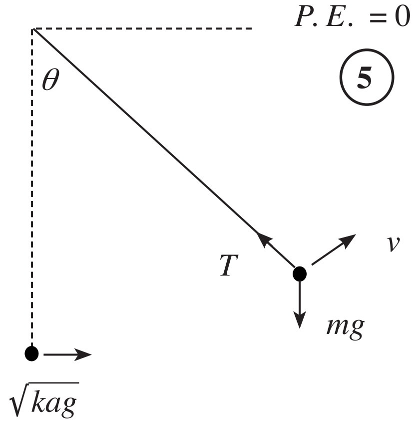
$R = v \quad \cos\frac{\pi}{6} \cdot t$ (5)

$R = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{ga} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$

$\therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. (5)

එබැවින් P අංශුව E හි සිදුරට වැටේ. $\boxed{30}$

(b)



(5)

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන් :

$-mga + \frac{1}{2}m(kag) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow v^2 = -2ga + kag + 2ag\cos\theta$

$v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ (5) $\boxed{25}$

$\nwarrow \underline{F} = m\underline{a}$

$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$ (10)

$\Rightarrow T - mg\cos\theta = \frac{m}{a}[(k-2)ag + 2ag\cos\theta]$

ආතතිය : $T = (k-2)mg + 3mg\cos\theta$ (5)

θ වැඩිවන විට v හා T දෙකම අඩුවේ.

(5) $T = mg(3\cos\theta - 2 + k)$

$T = 0$ විට $3\cos\theta - 2 + k = 0$

එනම් $\cos\theta = \dfrac{2-k}{3}$, 5

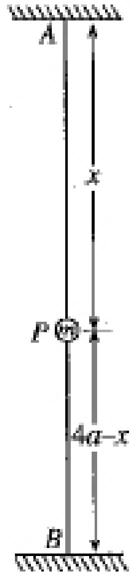
$$v^2 = (k-2)ag + 2ag\frac{(2-k)}{3}$$

$$= \frac{ag}{3}(k-2) > 0 \text{ as } k > 2.$$ 5

එම නිසා තන්තුව බුරුල් වන්නේ, $\cos\alpha = \dfrac{2-k}{3}$ $(2 < k < 5)$ වූ $\theta = \alpha$ විටය.

$\cos\alpha = \dfrac{2-k}{3}$ $(2 < k < 5)$. $\boxed{30}$

13 වන ප්‍රශ්නය



13. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එක එකක ස්වාභාවික දිග a හා මාපාංකය mg වූ සමාන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තු දෙකක කෙළවර දෙකකට ඈඳා ඇත. එක තන්තුවක නිදහස් කෙළවර A අචල ලක්ෂ්‍යයකට හා අනික් තන්තුවේ නිදහස් කෙළවර A ට සිරස් ව පහළින් $4a$ දුරකින් පිහිටි B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. (රූපය බලන්න.) තන්තු දෙකම තෙවුරුල්ව, A ට $\frac{5a}{2}$ දුරක් පහළින් අංශුව සමතුලිතව තිබෙන බව පෙන්වන්න.

P අංශුව දැන්, AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඔසවා එම පිහිටීමේ දී නිශ්චලතාවේ සිට සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. තන්තු දෙකම තෙවුරුල් හා AP තන්තුවේ දිග x වන විට, $\ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.
මෙම සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $X = x - \frac{5a}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ.
$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය c සොයන්න.
P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීමට ළඟා වන මොහොතේ දී PB තන්තුව කපනු ලැබේ.
නව චලිතයේ දී $x = a$ වන විට අංශුව එහි උච්චතම පිහිටීමට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

P අංශුව $x = 2a$ හි වූ එහි ආරම්භක පිහිටීමේ සිට පහළට a දුරක් ද ඊළඟට ඉහළට $\frac{a}{2}$ දුරක් ද චලනය වීමට ගනු ලබන මුළු කාලය $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3 + \sqrt{2}\right)$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

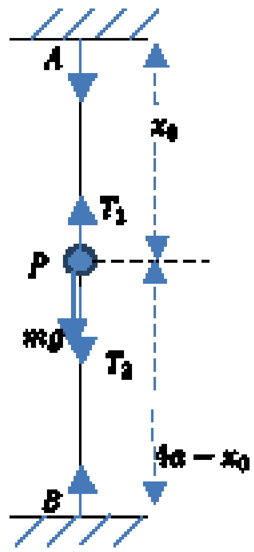
සමතුලිත පිහිටීමේ දී, $x = x_0$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\uparrow$ $T_1 = T_2 + mg$

$$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$$ 5

$x_0 - a = 3a - x_0 + a$

$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}$ 5



5

20

P සඳහා $\downarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$ 5

$$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$$ 0

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0.$$ 5

එවිට $X = x - \dfrac{5a}{2}$ හා $\omega^2 = \dfrac{2g}{a}$

$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ 5

සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය වන්නේ $x = \dfrac{5a}{2}$ 5

$\dot{X}^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$, මෙහි c යනු විස්ථාරයයි.

$X = \dfrac{a}{2}$ විට $\dot{X} = 0$ වේ. 5

$0 = \omega^2\left(c^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)$ $c = \dfrac{a}{2}$ 10

$\therefore$ පහත්ම පිහිටීම $X = \dfrac{a}{2}$ $\Rightarrow x = 3a.$ 5 **50**

PB තන්තුව කැපීමෙන් පසු

$\downarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \dfrac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$ 5

$\ddot{x} + \dfrac{g}{a}(x - 2a) = 0$ 5 $\ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0$, මෙහි $Y = x - 2a$ හා $\Omega^2 = \dfrac{g}{a}$ 5 5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x = 2a$.

$\dot{Y}^2 = \Omega^2(b^2 - Y^2)$, මෙහි b යනු විස්තාරයයි. 5

PB තන්තුව කැපීමෙන් මොහොතකට පසු, $\dot{Y} = 0$ හා $x = 3a$. 5

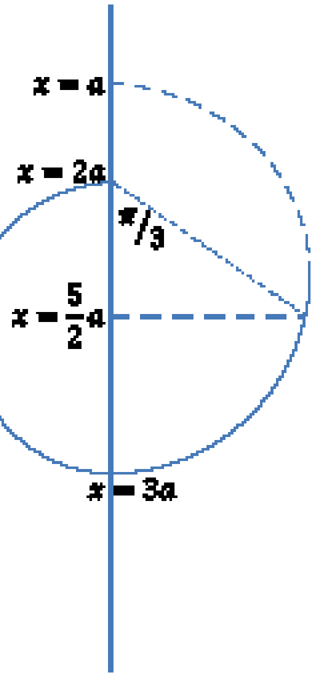
$\Rightarrow \dot{Y} = 0$ at $Y = a$. 5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ විස්තාරය a වේ.

නැවත $\therefore\ \dot{Y} = 0$ වන්නේ $Y = -a \Rightarrow x = a$ වන විටදී ය. 5

එනම් $x = a$ වන විටදී ය.

එනම් අංශුව $x = a$ හිදී උච්චතම පිහිටීමට පැමිණෙයි. 5 **45**



5 10

$x = 2a$ සිට $x = 3a$ දක්වා කාලය $= \dfrac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ 5

$x = 3a$ සිට $x = \dfrac{5a}{2}$ දක්වා කාලය $= \dfrac{\pi}{3\Omega} = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ 10

සම්පූර්ණ කාලය $= \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}} + \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

$= \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\,(3 + \sqrt{2}\,)$ 5 **35**

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) *OAB* ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද *D* යනු *AB* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද *E* යනු *OD* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. *F* ලක්ෂ්‍යය *OA* මත පිහිටා ඇත්තේ $OF : FA = 1 : 2$ වන පරිදි ය. *O* අනුබද්ධයෙන් *A* හා *B* හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් **a** හා **b** වේ. $\overrightarrow{BE}$ හා $\overrightarrow{BF}$ දෛශික **a** හා **b** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

B, *E* හා *F* ඒකරේඛීය බව **අපෝහනය** කර, $BE : EF$ අනුපාතය සොයන්න.

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$ අදිශ ගුණිතය $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$ ඇසුරෙන් සොයා, $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$ නම්, $\overrightarrow{BF}$ යන්න $\overrightarrow{DF}$ ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

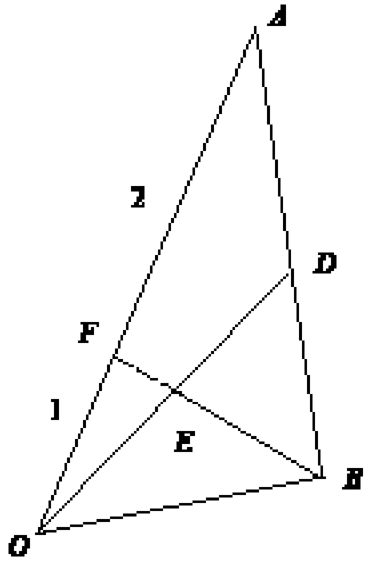
(*b*) *Oxy*-තලයේ වූ බල පද්ධතියක් පිළිවෙළින් $(-a, 2a)$, $(0, a)$ හා $(-a, 0)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියාකරන $3P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$, $2P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$ හා $-P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$ යන බල තුනෙන් සමන්විත වේ; මෙහි *P* හා *a* යනු පිළිවෙළින් නිව්ටන හා මීටරවලින් මනින ලද ධන රාශි වේ. *O* මූලය වටා, පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය, $12Pa$ Nm බව පෙන්වන්න.

තව ද පද්ධතිය, විශාලත්වය $5P$ N වූ තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, එහි දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

දැන්, අතිරේක බලයක් පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතිය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $24Pa$ Nm වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වන පරිදි ය. අතිරේක බලයෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

(*a*)

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \underline{b}$



$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\underline{a}$

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ 5

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b})$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{b} = \frac{1}{4}(\underline{a} - 3\underline{b})$

5 5

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\underline{a} - \underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b})$

$\Rightarrow \; 4\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF}$

B, *E*, *F* ඒක රේඛීය වේ සහ $BE : EF = 3 : 1$ 5

5

$\boxed{30}$

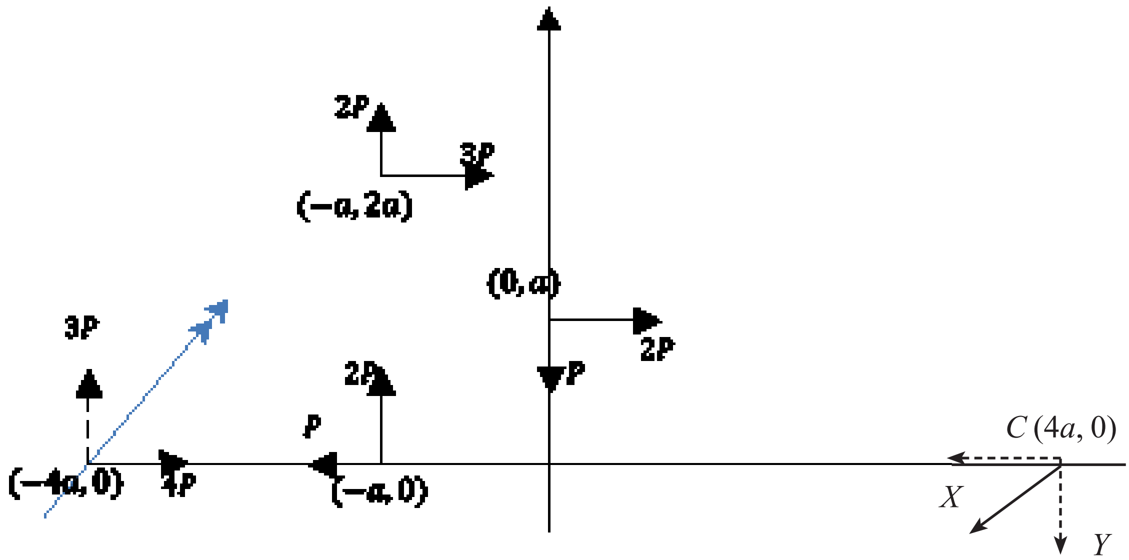
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{6}(\underline{a} + 3\underline{b}) \quad 5$$

$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \cdot \frac{1}{6}(-\underline{a} - 3\underline{b}) \quad 5$$

$$= \frac{1}{18}(|\underline{a}|^2 - 9|\underline{b}|^2) = 0, \quad 5 \quad (|\underline{a}| = 3|\underline{b}| \text{ බැවින්})$$

∴ ඒවා නිශ්ශුන්‍ය බැවින් $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{DF}$ 5 $\boxed{20}$

(*b*)



0 ↻ වටා දක්ෂිණාවර්තව ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

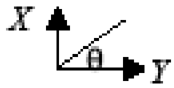
$G = 2Pa + 3P2a + 2Pa + 2Pa = 12Pa$ Nm; 10

විභේදනයෙන් $\rightarrow$ $X = 3P + 2P - P = 4P$ 5

$\uparrow$ $Y = 2P + 2P - P = 3P$ 5

R සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $5P$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$R = \sqrt{x^2 + y^2} = 5P$ 5



ක්‍රියා රේඛාව x – අක්ෂය සමග θ කෝණයක් සාදයි, මෙහි $\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$. 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව $(-b, 0)$, $(b > 0)$ ලක්ෂ්‍යයේදී x – අක්ෂය හමුවේ නම් එවිට

$0 \curvearrowright$

$Yb = 3Pb = 12Pa \Rightarrow b = 4a$ 5

5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4a) \Rightarrow 4y - 3x = 12a$$

10

$\boxed{60}$

දැන් $C \equiv (c, 0)$, $c > 0$ ලක්ෂ්‍යයේදී $(4P, -3P)$ බලයක් යෙදීමෙන් පමණක් පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. 5

$C \curvearrowright$ $3P(c + 4a) = 24Pa$ 10

$\Rightarrow c = 4a$ 5 5

අමතර බලයේ විශාලත්වය $= 5P\ N$, බල සහ එහි දිශාව x – අක්ෂයේ සෘණ දිශාව සමග

5

$\tan^{-1}\left(\frac{-3P}{-4P}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ කෝණයක් සාදයි.

අමතර බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4a)$ 10

$\Rightarrow 4y - 3x + 12a = 0.$

$\boxed{40}$

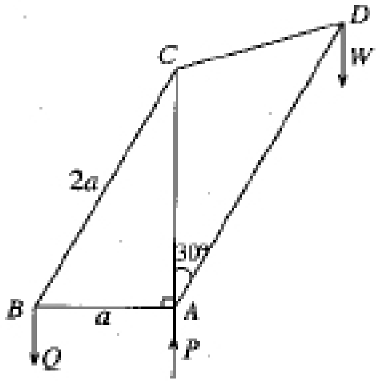
---

15 වන ප්‍රශ්නය

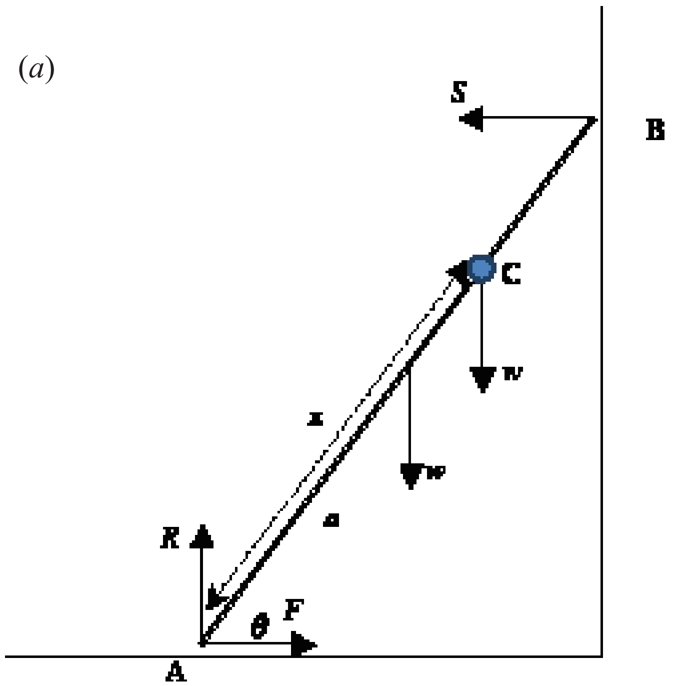
15. (*a*) බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර රළු තිරස් බිමක් මත හා B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව තබා ඇත. දණ්ඩ බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටන අතර, එය තිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි; මෙහි $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ වේ. $AC = x$ ලෙස දණ්ඩ මත වූ C ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. අංශුව සහිත දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩ හා බිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{5}{6}$ වේ. $x \le \dfrac{3a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, AB, BC, AC, CD හා AD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත. $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = CD$ හා $C\hat{A}D = 30^\circ$ බව දී ඇත. බර W වූ භාරයක් D හි එල්ලෙන අතර පිළිවෙළින් A හා B හි දී **රූපයේ දක්වා ඇති දිශාවලට** ක්‍රියාකරන P හා Q සිරස් බලවල ආධාරයෙන් AB තිරස් ව හා AC සිරස් ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තිබේ. Q හි අගය W ඇසුරෙන් සොයන්න.

බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, **ඒ නයින්**, දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා, මෙම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.



(*a*)



AB දණ්ඩට A ↶

$S.\,2a\sin\theta = W(a\cos\theta + x\cos\theta)$ (15)

$\Rightarrow S.\,2a\,.\,\dfrac{3}{5} = W(a+x).\,\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow S = \dfrac{2W(a+x)}{3a}$ (5)

විභේදනයෙන්

$\rightarrow \quad F = S = \dfrac{2W(a+x)}{3a}.$ (5)

$\uparrow \quad R = 2W.$ (5)

$F \le \mu R$ හා $\mu = \dfrac{5}{6}$

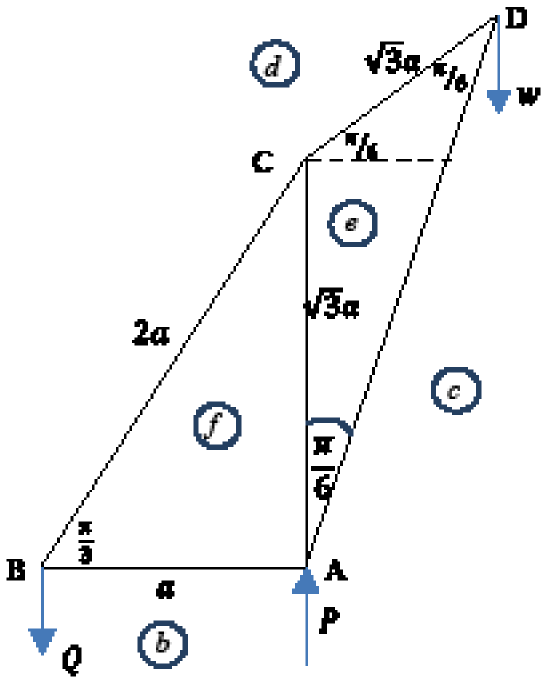
(5) $\Rightarrow \dfrac{2W(a+x)}{3a} \le \dfrac{5}{6}\cdot 2W$ (5)

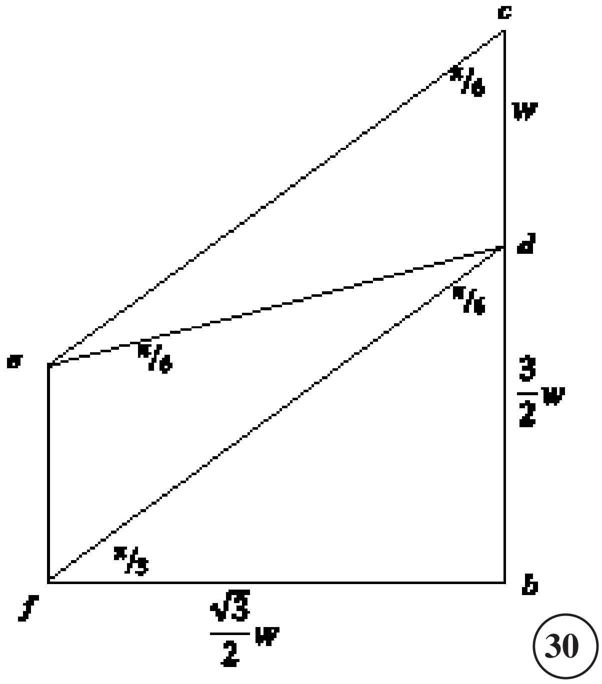
$\Rightarrow a + x \le \dfrac{5a}{2}$

$\Rightarrow x \le \dfrac{3a}{2}.$ (5)

$\tan\theta = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{3}{5}$ හා $\cos\theta = \dfrac{4}{5}.$ (5)

60





$$AD = 2(\sqrt{3}\,a\cos 30^\circ) = 3a$$

A ↻ $Qa = W\ AD\cos 60^\circ$

$$\Rightarrow Q = \frac{3}{2}W \quad (10)$$

$$\uparrow P = Q + W \Rightarrow P = \frac{5}{2}W$$

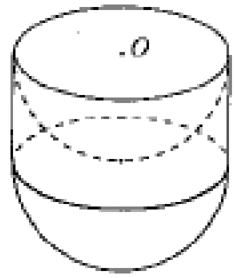
දණ්ඩ	ආතති	තෙරපුම
AB		$\frac{\sqrt{3}}{2}W$
BC	$\sqrt{3}W$	
AC		W
CD	W	
AD		$\sqrt{3}W$

50

90

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

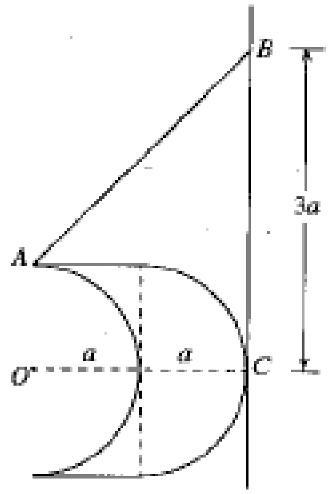
අරය a, උස a හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සිලින්ඩරයේ ඉතිරි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණතට අරය a හා ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක වෘත්තාකාර මුහුණත සවි කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සම්පාත වන පරිදි ය. මෙලෙස සාදාගනු ලබන S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ගැටියේ O කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

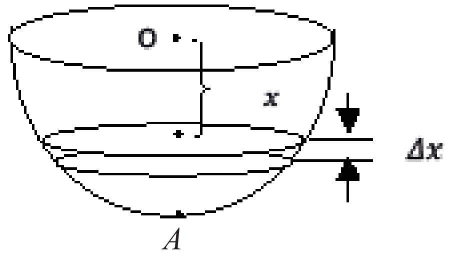


$\lambda = 2$ යැයි ද A යනු S වස්තුවෙහි වෘත්තාකාර ගැටිය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.

මෙම S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ, A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. මෙම සමතුලිත පිහිටීමේ දී S හි සමමිතික අක්ෂය බිත්තියට ලම්බව පිහිටන අතර S හි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය B ලක්ෂ්‍යයට $3a$ දුරක් සිරස් ව පහළින් වූ C ලක්ෂ්‍යයේ දී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. (යාබද රූපය බලන්න.) O, A, B හා C ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි.

μ යනු බිත්තිය හා S හි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, $\mu \geq 3$ බව පෙන්වන්න.





5

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, OA මත පිහිටයි.

$OG = \overline{x}$ යයි ද ρ ඝනත්වය යයි ද ගනිමු. එවිට

$$\Delta m = \pi(a^2 - x^2)\Delta x \rho$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho x \, dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho \, dx} \qquad 15$$

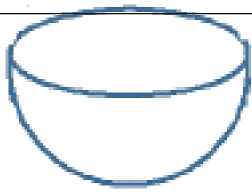
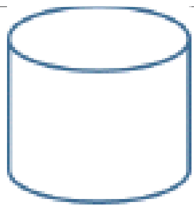
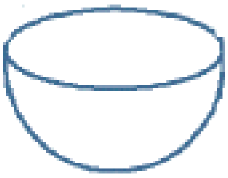
$$= \frac{\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx} \quad = \frac{\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a} \qquad 10$$

5

$$=\frac{\left(\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right)}{\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)}=\frac{3}{8}a$$

එම නිසා O සිට ස්කන්ධය කේන්ද්‍රයට $\frac{3}{8}a$ දුර වේ. 5

40

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර
	$\frac{2}{3}\lambda\pi a^3\rho$ 5	$\frac{11}{8}a$ 5
	$\pi a^3\rho$ 5	$\frac{1}{2}a$ 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{3}{8}a$ 5
	$\left(\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)a^3\rho$ 5	$\bar{x}$

සමමිතිය මගින් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

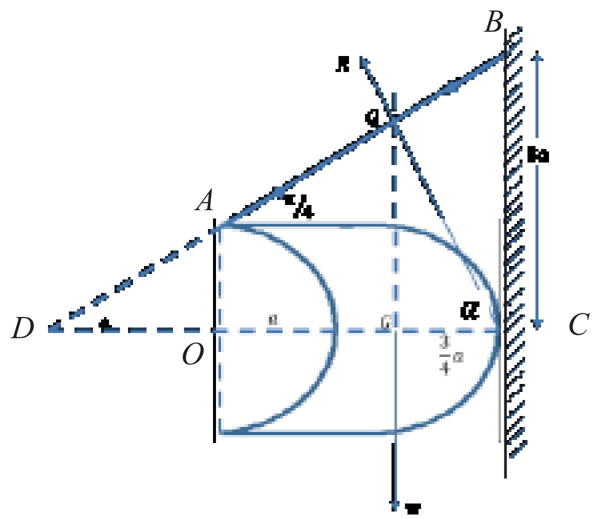
$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\pi a^3\rho\bar{x}_1 = \frac{11}{8}a\times\frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho + \frac{a}{2}\times\pi a^3\rho - \frac{3}{8}a\frac{2}{3}\pi a^3\rho$$ 25

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\bar{x} = \frac{11}{8}a\times\frac{2\lambda}{3}+\frac{a}{2}-\frac{3a}{8}\times\frac{2}{3}$$

$$= \frac{11\lambda}{12}a+\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{1}{12}(11\lambda+3)a$$

$$\bar{x} = \frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)}$$ 10

75



λ = 2 විට $\bar{x} = \frac{5a}{4}$ 5

සමතුලිතතාව සඳහා,

10 $$\mu \ge \tan\alpha = \frac{QG}{GC} = \frac{\frac{9a}{4}}{\frac{3a}{4}} = 3.$$ 5 5

$\therefore \mu \ge 3.$ 5

35

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) ආයතනයක එක්තරා රැකියාවකට අයදුම් කරන සියලු ම අයදුම්කරුවන් අභියෝගතා පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටීම අවශ්‍ය වේ. මෙම අභියෝගතා පරීක්ෂණයෙන් A ශ්‍රේණියක් ලබන අය රැකියාව සඳහා තෝරාගනු ලබන අතර, ඉතිරි අයදුම්කරුවන් සම්මුඛ පරීක්ෂණයකට මුහුණ දිය යුතු ය. අයදුම්කරුවන්ගෙන් 60% ක් A ශ්‍රේණි ලබන බව ද ඒ අයගෙන් 40% ක් ගැහැනු අය බව ද සමීක්ෂණයක දී සොයා ගෙන ඇත. සම්මුඛ පරීක්ෂණයට මුහුණ දෙන අයදුම්කරුවන්ගෙන් 10% ක් පමණක් තෝරාගනු ලබන අතර එයින් 70% ක් ගැහැනු අය වෙති.

(i) මෙම රැකියාව සඳහා පිරිමි අයකු තෝරාගනු ලැබීමේ,

(ii) රැකියාවට තෝරාගනු ලැබූ පිරිමි අයකු අභියෝගතා පරීක්ෂණයට A ශ්‍රේණියක් ලබා තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා රෝහලක රෝගීන් 100 දෙනකුගේ ප්‍රතිකාර ලබා ගැනීමට පෙර රැඳී සිටි කාල (මිනිත්තුවලින්) එක් රැස් කරනු ලැබේ. එම එක් එක් කාලයෙන් මිනිත්තු 20ක් අඩු කිරීමෙන් ලැබෙන අන්තර එක එකක් 10න් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගයන්ගේ ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙයි.

අගයන්ගේ පරාසය	රෝගීන් ගණන
−2 — 0	30
0 — 2	40
2 — 4	15
4 — 6	10
6 — 8	5

මෙම වගුවෙහි දී ඇති ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

ඒ නයින්, රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මධ්‍යන්‍යය μ සහ සම්මත අපගමනය σ නිමානය කරන්න.

තව ද $\kappa = \frac{\mu - M}{\sigma}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලබන කුටිකතා සංගුණකය κ නිමානය කරන්න; මෙහි M යනු රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මාතය වේ.

(*a*) X = රැකියාව සඳහා පිරිමි අයකු තේරීම

A = අභියෝගතා පරීක්ෂණය සඳහා A සාමාර්ථයක් ලබා ගැනීම

(i) $P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{93}{250}$ 10

10 10

30

(ii) $P(A/X) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{93}{250}} = \frac{30}{31}$ 10

10 10

30

(*b*)

		5		5	5
අගය පරාසය	f	මධ්‍ය අගය y	y^2	fy	fy^2
$-2-0$	30	-1	1	-30	30
$0-2$	40	1	1	40	40
$2-4$	15	3	9	45	135
$4-6$	10	5	25	50	250
$6-8$	5	7	49	35	245
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma fy = 140$	$\Sigma fy^2 = 700$
				5	5

මධ්‍යන්‍යය : $\mu_y = \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$. 5

5

සම්මත අපගමනය : $\sigma_y^2 = \frac{\Sigma fy^2}{\Sigma f} - \mu_y^2 = \frac{700}{100} - \frac{49}{25}$, $\sigma_y = \frac{\sqrt{504}}{10} \approx 2.24.$

5 5

45

$y = \frac{x-20}{10} \Longrightarrow x = 10y + 20.$

එවිට $\mu = 10\mu_y + 20 = 10\left(\frac{7}{5}\right) + 20 = 34.$ 5

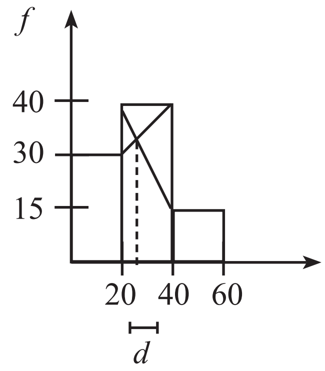
5

$\sigma = 10\sigma_y = 10(2.24) = 22.4.$

5 5

20

මාතය M සෙවීම සඳහා



y හි පරාසය	x හි පරාසය	සංඛ්‍යාතය
$-2-0$	$0-20$	30
$0-2$	$20-40$	40
$2-4$	$40-60$	15

5 $\quad \dfrac{d}{40-30} = \dfrac{20-d}{40-15} \Rightarrow d = \dfrac{40}{7}$ 5 $\Rightarrow M = 20 + \dfrac{40}{7}$ 5 ≈ 25.71 5

$$k = \frac{\mu - M}{\sigma} = \frac{34 - 25.71}{22.4} \approx 0.37$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$M = L_{MO} + C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) = 20 + 20\left(\frac{10}{10+25}\right) \approx 25.71$$ 5

10 $\qquad$ 5