2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ විට, වෘ පැ: $= 1^3 = 1$ හා දෘපැ: $= \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$. 5

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$. 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 5

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2 + 4p + 4]}{4}.$$

$$= \frac{1}{4} (p+1)^2 (\overline{p+1} + 1)^2.$$ 5

එනයින් $n = p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n = p + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

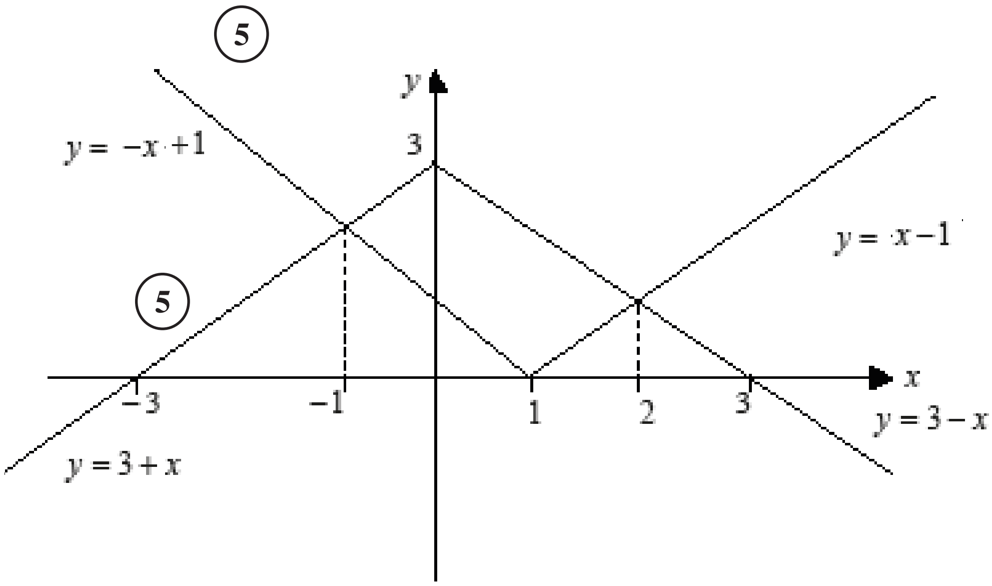
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් පමණි. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය නිසියාකාරව යෙදීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 66%කි. $n = p$ විට; $p \in \mathbb{Z}^+$ ට උපකල්පනයේ දී $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{p^2}{4}(p+1)^2$ ලෙස ලිවිය යුතු වුවත් $\sum_{r=1}^{p} p^3 = \frac{p^2}{4}(p+1)^2$ වැනි වැරදි සහිතව ලියා තිබීම නිසා අපේක්ෂකයන් වැඩි දෙනෙකුට එම පියවර සඳහා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. තවද අවසානයේ දී "ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ යන්න" ලියා නොතිබූ අවස්ථා ද දක්නට ලැබුණි.

සිසුන් අනවබෝධයෙන් $\sum_{r=1}^{p} r^3$ යන්නෙහි අදහස තේරුම් නොගෙන පිළිතුරු ලිවීම මෙයට හේතුව වේ. සිසුන්ට මෙම අංකනයන්ගේ තේරුම් අවබෝධ කරවීම තුළින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැක. තවද ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ පියවර තහවුරු වන පරිදි අභ්‍යාසවලට යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගැනීමට සිසුන් උනන්දු කළ යුතුය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3-|x|$ හා $y = |x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x|+|x-1| \le 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යවලදී $-x+1 = 3+x$ හෝ $x-1 = 3-x$

එනම් $x = -1$ හෝ $x = 2$. 5

තවද, $|x| + |x-1| \le 3$

$\Leftrightarrow \ |x-1| \le 3 - |x|$ 5

එනයින්, ප්‍රස්තාරයෙන්, විසඳුම් $-1 \le x \le 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. 5

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x| + |x-1| \le 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$: $|x| + |x-1| \le 3 \Leftrightarrow -x-(x-1)| \le 3$

$\Leftrightarrow -2x+1 \le 3$ 5

$\Leftrightarrow x \ge -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \le x \le 0$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq 1$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \leq 3$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0 < x \leq 1$ වේ. 5

(iii) අවස්ථාව $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1 < x \leq 2$ වේ.

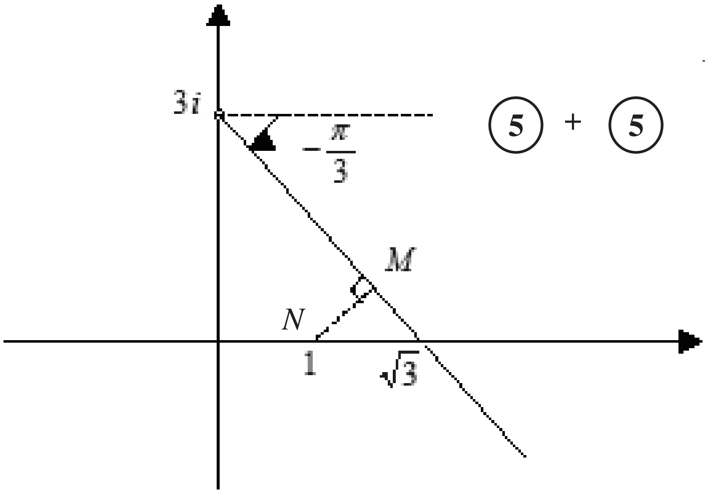
එනයින් විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. 5

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93% ක් පමණි. මාපාංක ඇතුළත් ශ්‍රිතයන්හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් ඇඳීම වඩා පහසු වන අතර ඒ නයින් විසඳුම් සෙවීම පහසු වුවත් අන් ක්‍රමයකින් (වීජීය ක්‍රමය) විසඳුම් ලබා ගැනීමට යොමු වීම නිසා ලකුණු ලබා ගැනීමට අපොහොසත් වී තිබුණි. මාපාංක ඇතුළත් අසමානතා නිවැරදිව තහවුරු වන ආකාරයේ අභ්‍යාසවල විවිධ ක්‍රම යටතේ විසඳුම් ලබා ගැනීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීම පහසුවෙන් සිදු කළ හැකිය. සිසුන්ට එකම ගැටලුව විසඳීමට විවිධ ක්‍රම ඇතිවිට ඒවායින් වඩා යෝග්‍ය ක්‍රමය තෝරා ගැනීමට හැකියාව සිසුන්ට ලැබෙන පරිදි විවිධ ගැටලු සම්පාදනය කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැක.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\dfrac{\pi}{3}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



5 + 5

$$\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{Arg}\left(\overline{\bar{z}+3i}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{Arg}(z-3i)=-\frac{\pi}{3}.$$ 5

එනයින්, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය NM දෙනු ලබයි. 5

මෙහි $NM=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{(3-\sqrt{3})}{2}.$ 5

25

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 83% ක් පමණි. $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\dfrac{\pi}{3}$ හි පථයට $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍ය අයත් නොවිය යුතු බව හඳුනාගෙන නොතිබීම ලකුණු අහිමි වීමට හේතු විය. තවද ගැටළුවෙහි (ii) කොටස විසඳීමේදී $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\dfrac{\pi}{3}$ යන්න, $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\dfrac{\pi}{3}$ ඇසුරෙන් ලබා ගත යුතු බව හඳුනා ගෙන නොතිබුණි.

පථ අඩංගු විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවීම මගින් සිසුන් ලබාගන්නා ලකුණු මට්ටම වර්ධනය කරගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $\left(x^2 + \dfrac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^4 හි සංගුණක සමාන වේ. k නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \qquad 5$$

$$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$$x^1 : 3r - 8 = 1 \Leftrightarrow r = 3,$$
$$x^4 : 3r - 8 = 4 \Leftrightarrow r = 4. \qquad 5$$

දත්තයෙන් $\;{}^8C_3 (3k)^5 = {}^8C_4 (3k)^4 \qquad 5$

$$\frac{8!}{3!\,5!} 3^5 k = \frac{8!}{4!\,4!} 3^4 \qquad 5$$

$$k = \frac{5}{12}. \qquad 5$$

25

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 87% ක් පමණි. මෙහිදී x^1 හා x^4 හි සංගුණක නිවැරදිව හඳුනා ගැනීමට නොහැකි වූ බැවින් k සොයා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. මෙවැනි සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතා මග හරවා ගත හැකිය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)}$$ 5

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1}$$

5

$$= 2.\ 1^2.\ \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{1}$$

5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} \cdot \frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}$$ 5

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

5

$$= 1 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$$

5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

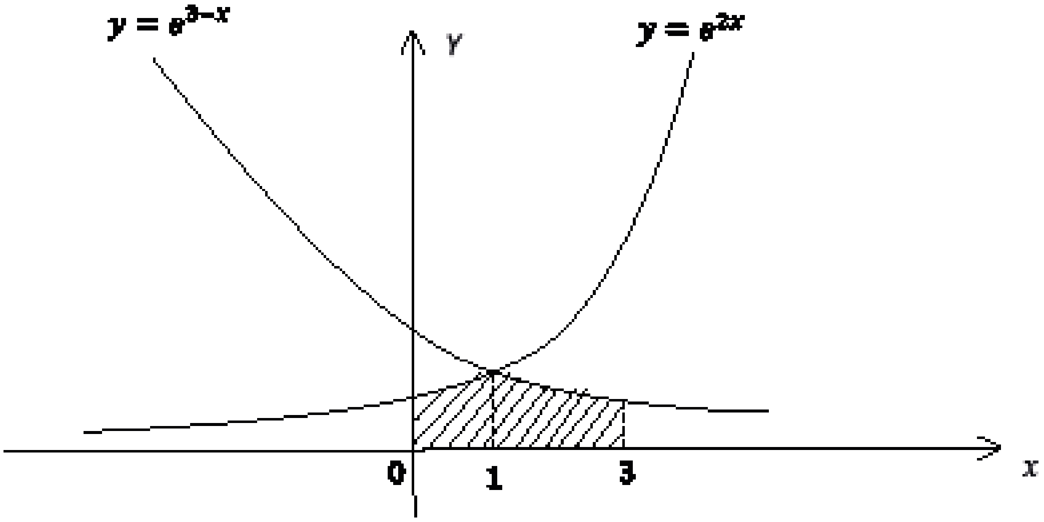
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. දී ඇති ශ්‍රිතය $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ආකාරයට සකස් කර ගැනීමට සහ ශ්‍රිත කිහිපයක ගුණිතයක් ලෙස ලිවීමට අපොහොසත් වී තිබීම නිසා පිළිතුරට ළඟා වීමට නොහැකි වී තිබුණි.

මෙවැනි ආකාරයේ අභ්‍යාසවල සිසුන් නිරත කරවීමෙන්, මෙවැනි දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මඟින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.



$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}\,dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{3-x}}{(-1)}\right|_1^3 \quad 5$$

(5) (5)

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2 \quad 5$$

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1). \quad 5$$

25

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 78% ක් පමණි. $y = e^{2x}$ හා $y = e^{3-x}$ ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීමට අපොහොසත් වීම නිසා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. ඝාතීය ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඇඳීමට හා ඝාතීය ශ්‍රිත අඩංගු ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ සඳහා $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y = \sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad\qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2} \quad 5 \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad 5$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \quad 5$$

$$= \frac{1}{\sin t}$$

දැන් $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$ 5

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

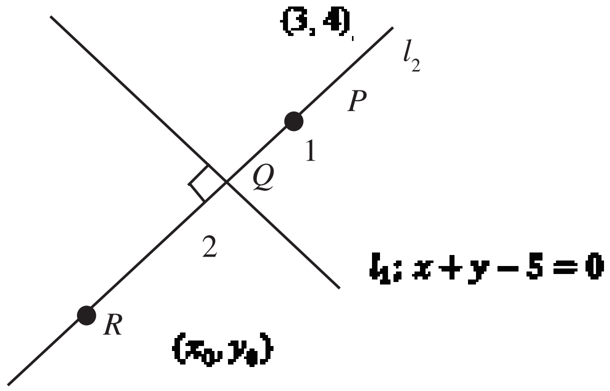
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. $ln\,(\tan\frac{t}{2})$ අවලකනය කිරීමේදී $\frac{t}{2}$ හි අවකලන සංගුණකය වන $\frac{1}{2}$න් ගුණ නොකිරීම නිසා $\frac{dx}{dt}$ නිවැරදිව සොයා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

ශ්‍රිතයක ශ්‍රිතයක් අඩංගු ගැටලු වැඩිපුර අවකලනය කිරීමට සිසුන් යොමු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගැනීමට හැකිය.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. l_1 යනු $x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P \equiv (3, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l_1 ට ලම්බ වූ l_2 සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

Q යනු l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද R යනු $PQ : QR = 1 : 2$ වන පරිදි l_2 මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_2 හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{-1} = 1$ 5

l_2 සමීකරණය $: y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0$ 5

$Q \equiv (2,3).$ 5

$R \equiv (x_0, y_0)$ යැයි ගනිමු.

එවිට,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$ සහ $3 = \frac{y_0+8}{3}$ 5

$\therefore x_0 = 0$ සහ $y_0 = 1.$

$\therefore R \equiv (0,1).$ 5

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$ 5

$R \equiv \left(\frac{-2\times3 + 2\times3}{3-2}, \frac{-2\times4 + 3\times3}{3-2}\right)$

$= (0,1)$ 5

25

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88% ක් පමණි. R ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම නිවැරදිව අවබෝධ කර ගැනීමට නොහැකි වීම නිසා, R හි ඛණ්ඩාංක සොයා ගැනීමට අපොහොසත් වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවයන් මඟ හරවා ගැනීමට හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. $P \equiv (1, 2)$ හා $Q \equiv (7, 10)$ යැයි ගනිමු. P හා Q ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි a හා b නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x - 3y + 2) = 0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. P හා Q ලක්ෂ්‍ය $S' = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R \equiv (1, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$a = 7,$ 5

$b = 10,$

$P \equiv (1, 2)$ සහ $Q \equiv (7, 10)$ යන දෙකම $S = 0$ සහ $4x - 3y + 2 = 0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින්

$S' = 0$ වේ. 5 5

$\therefore P$ හා Q ලක්ෂ්‍ය $S' = 0$ මත පිහිටයි.

$S' = 0$ යන්න $R \equiv (1, 4)$ හරහා යයි නම්,

$0 + (4 - 2) \times (4 - 10) + \lambda(4 - 12 + 2) = 0$ වේ. 5

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2.$ 5

25

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 83% ක් පමණි. PQ විෂ්කම්භයක් වන වෘත්තය සෙවීමේදී ඒ සඳහා සම්මත සමීකරණය වන $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ භාවිතා කිරීමෙන්, g, f, c නියත සොයා ගැනීමට අපොහොසත් වී තිබුණි. $4x - 3y + 2 = 0$ රේඛාව මත P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිහිටන බව පෙන්වීමට අපොහොසත් වීම නිසා, $s' = 0$ වෘත්තය P හා Q හරහා යන බව පෙන්වීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සමාන ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවයන් මඟ හරවා ගැනීමට හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

$\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad 5$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \quad 5$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \quad 5 \qquad \because n \in Z \text{ සඳහා } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \quad 5$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 83% ක් පමණි. මෙය ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යයන් සම්බන්ධ ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 28% කි. මෙම ගැටලුවේදී $\sec x,\ \tan x$ අඩංගු පද $\sin x,\ \cos x$ පදවලට පරිවර්තනය කර ගැනීමට නොහැකි වීමෙන් මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. තවද සුළු කිරීමේ දුර්වලතා ද දක්නට ලැබුණි. වැඩිපුර සර්වසාම්‍යයන් විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාවයන් මඟ හරවා ගත හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන්, $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා,

$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර, a ඇසුරෙන් b සොයන්න.

(*b*) $c\,(\neq 0)$ හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x + c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න.
c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*a*) $\mathbf{3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0}$

විවේචකය Δ $= 4(a+b)^2 - 12(ab)$ 10

$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= 4(a^2 - ab + b^2)$

$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0$, සියලු $a, b \in \mathbb{R}$.

5 5

ඒ නයින්, මූල තාත්ත්වික වේ. 5 $\boxed{25}$

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a+b) \qquad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$

5 5

$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow = (\beta - \alpha)^2 = 4$ 5

$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 4$ 5

$\Rightarrow \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab = 4$ 5 5

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ 5 $\boxed{35}$

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$

$= -\frac{3a^2}{4} + 9$

$= \frac{3}{4}(12 - a^2)$ 10

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ 5

$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$ 5

$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}.$ 10 $\boxed{30}$

(*b*) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ 5

5 $\Rightarrow 3c^2 + d = 0$ .... (1)

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ 5

5 $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0$ .... (2)

$(2) - (1)$ මගින් $c^3 + 2c^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0$

$c \neq 0,$ නිසා $c = -2.$ 5

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12.$ 5 $\boxed{35}$

දැන් $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12.$

$f(x)$ යන්න $x^2 - 4,$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x + \mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu.$ 5

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x+2)q(x) + \lambda x + \mu.$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$ හා $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

5 5

$\Rightarrow \mu = 4$ හා $\lambda = 2$ 5

$\therefore$ ශේෂය $= 2x + 4$ 5

25

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $t_n = \displaystyle\sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) (i)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන		කමිටු ගණන	
1 කණ්ඩායම	**2** කණ්ඩායම		
2	4		
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$	10
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$	10
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$	10
		27	5

වෙනස් කමිටු ගණන $= 27 \times 2$

$= 54$ 10 $\boxed{45}$

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24$ 5 $\boxed{15}$

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

1 කණ්ඩායම		2 කණ්ඩායම		කමිටු ගණන	
M(3)	F(2)	M(3)	F(2)		
2		2	2	${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$	10
2		3	1	${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$	10
1	1	3	1	${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$	10
2	2	2		9	
3	1	2		6	5
3	1	1	1	12	

කමිටු ගණන : 9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54 10

(*b*)

$$f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2} \quad 5$$

$$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2} \quad 5$$

$$= 4U_r \quad 5$$

15

එවිට

$$r = 1; \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$$
$$r = 2; \quad 4U_2 = f(2) - f(4) \quad 10$$
$$r = 3; \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$$
$$\vdots$$
$$r = n-2; \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$$
$$r = n-1; \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1) \quad 10$$
$$r = n; \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$$

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2) \quad 10$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}. \quad 10$$

40

$n \to \infty$ විට ද.පැ.හි සීමාව $\frac{13}{144}$ 5

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{13}{144}$ 5

5

$\boxed{15}$

$$t_n = \sum_{r=n}^{2n} u_r$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} u_r - \sum_{r=1}^{n-1} u_r \quad 5$$

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2n} u_r - \sum_{r=1}^{n-1} u_r \quad 5$$

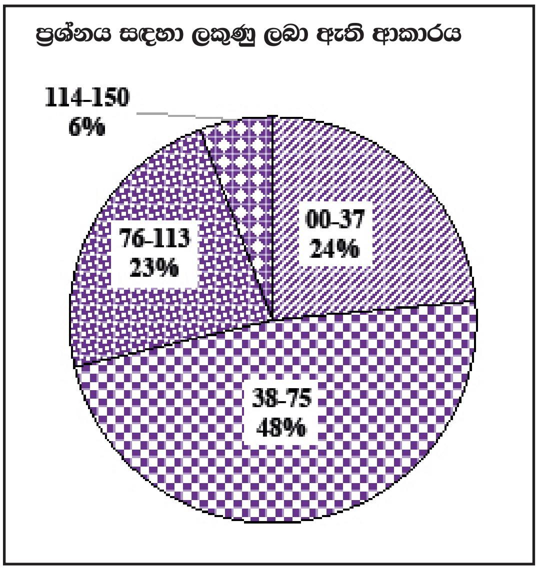
$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144} \quad 5$$

$$= 0. \quad 5$$

$\boxed{20}$

---

12 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ නිගමන හා යෝජනා :



මෙම ප්‍රශ්නය තෝරාගෙන ඇති අපේක්ෂකයන්ගේ ප්‍රතිශතය 80% ක් පමණි. මෙහි පහසුතාව 40% කි. මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා ලකුණු 150 ක් වෙන් කර ඇත. ඉන්

ලකුණු 00 - 37 ප්‍රාන්තරයේ 24% ක් පමණ ද,
ලකුණු 38 - 75 ප්‍රාන්තරයේ 48% ක් පමණ ද,
ලකුණු 76 - 113 ප්‍රාන්තරයේ 23% ක් පමණ ද,
ලකුණු 114 - 150 ප්‍රාන්තරයේ 6% ක් පමණ ද,
යන ලෙස ලකුණු ලබාගෙන ඇත.

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ මඟින් අර්ථ දැක්වෙන $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයා, a හි කිසිදු අගයකට $\mathbf{P}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිත ව, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ලියා දක්වා $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ වන පරිදි $\mathbf{R}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි, මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු. $\mathrm{Re}\, w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\mathrm{Im}\, w = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$ නම්, $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

(*c*) ආගන්ඩ් සටහනක, A හා B ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. C හා D ලක්ෂ්‍ය පළමුවන චතුර්ථ පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය; මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ වේ. C හා D ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(*a*) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 10 $\boxed{10}$

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ 5

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා P^{-1} නොපවතී. 5 $\boxed{10}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

P^{-1} පැවතීම සඳහා

5

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1,\quad b + ad = 0,\quad 2c + 2ae = 0$ සහ $c + ae = 1,$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා P^{-1} නොපවතී. 5

$\boxed{10}$

$P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, නම් $\begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. 5

$\Leftrightarrow 2 + 4a = 10$ සහ $1 + 2a = 5.$

$\Leftrightarrow a = 2.$ 5

$\boxed{10}$

$a = 2.$

$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$ 10

$\boxed{15}$

$AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$= 5Q^{-1}.$ 5

$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$

5 5

$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}.$ 5

$\boxed{20}$

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

5 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ සහ $\bar{z} = x - iy.$ 5 $\boxed{10}$

(i) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ 5

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$ සහ 5

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z.$ 5 $\boxed{15}$

$z \neq 1,\ w = \dfrac{1+z}{1-z} \times \dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z}}{|1-z|^2} = \dfrac{1 - |z|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$

5 5 5

$\mathrm{Re}\, w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ සහ $\mathrm{Im}\, w = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$ 5 $\boxed{20}$

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi).$

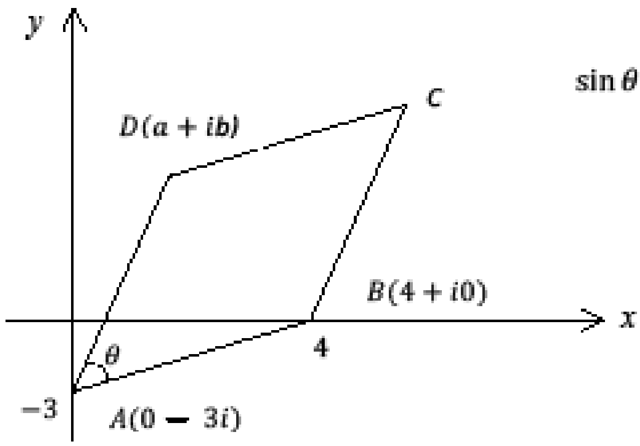
එවිට $|z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w = 0.$

5

$\therefore\ w = \dfrac{2i\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2} = \dfrac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = i\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\dfrac{\alpha}{2}.$

5 5 5 $\boxed{20}$

(c)



$\sin\theta = \dfrac{7}{25}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{24}{25}$

$D \equiv (a, b)$ යැයි ගනිමු.

A වටා AB වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් AD ලබා ගත හැක.

$\therefore a + i(b + 3) = (4 + 3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$ **10**

$$= (4 + 3i)\left(\frac{24}{25} + i\,\frac{7}{25}\right)$$

$\Leftrightarrow a + i(b + 3) = (3 + 4i)$

$\Leftrightarrow a = 3$ හා $b = 1.$

$\therefore D$ මගින් $3 + i$ නිරූපණය කරයි. **5**

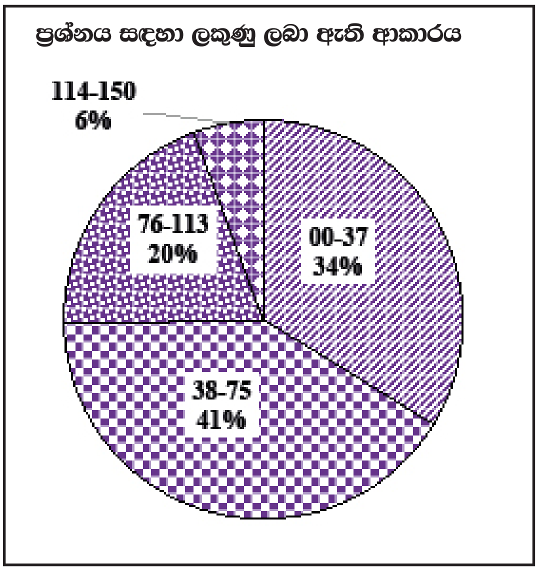
$C \equiv (p, q)$ නම්, $\dfrac{p + 0}{2} = \dfrac{3 + 4}{2}$ හා $\dfrac{q - 3}{2} = \dfrac{1 + 0}{2}$

$\Rightarrow p = 7$ හා $q = 4$

$\therefore C$ මගින් $7 + 4i$ නිරූපණය කරයි. **5** $\boxed{20}$

---

13 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා :



මෙම ප්‍රශ්නය තෝරාගෙන ඇති අපේක්ෂකයන්ගේ ප්‍රතිශතය 69% ක් පමණි. මෙහි පහසුතාව 39% කි. මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා ලකුණු 150 ක් වෙන් කර ඇත.
ඉන්
ලකුණු 00 - 37 ප්‍රාන්තරයේ 34% ක් පමණ ද,
ලකුණු 38 - 75 ප්‍රාන්තරයේ 41% ක් පමණ ද,
ලකුණු 76 - 113 ප්‍රාන්තරයේ 20% ක් පමණ ද,
ලකුණු 114 - 150 ප්‍රාන්තරයේ 6% ක් පමණ ද,
යන ලෙස ලකුණු ලබාගෙන ඇත.

14 වන ප්‍රශ්නය

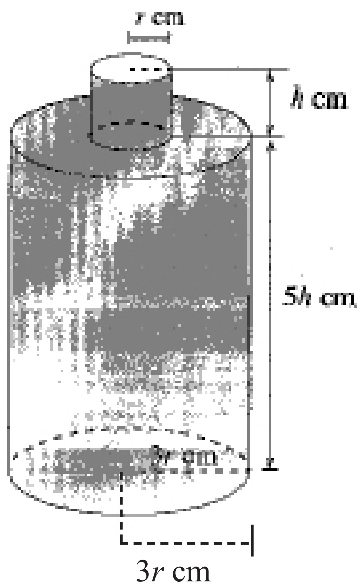
14. (*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in \mathbb{R}$ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) අරය $3r$ cm හා උස $5h$ cm වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය r cm වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය r cm හා උස h cm වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර 391π cm^3 ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = \pi r(32h + 17r)$ බව දී ඇත. S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3};$ සඳහා $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)},$

එවිට

$$f'(x) = \frac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2} \quad 15$$

$$= \frac{16(x+1)[(x+1)(3x-1) - 2(x-1)(3x-1) - 3(x-1)(x+1)]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}\,;\ \left(x \neq -1, \frac{1}{3}\right) \quad 10$$

$\boxed{25}$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$ එවිට $y = 0.$ 5

$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to \frac{1}{3}^{-}} f(x) = \infty$ සහ $\lim_{x\to \frac{1}{3}^{+}} f(x) = -\infty,$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = -1$ සහ $x = \frac{1}{3}$ 5

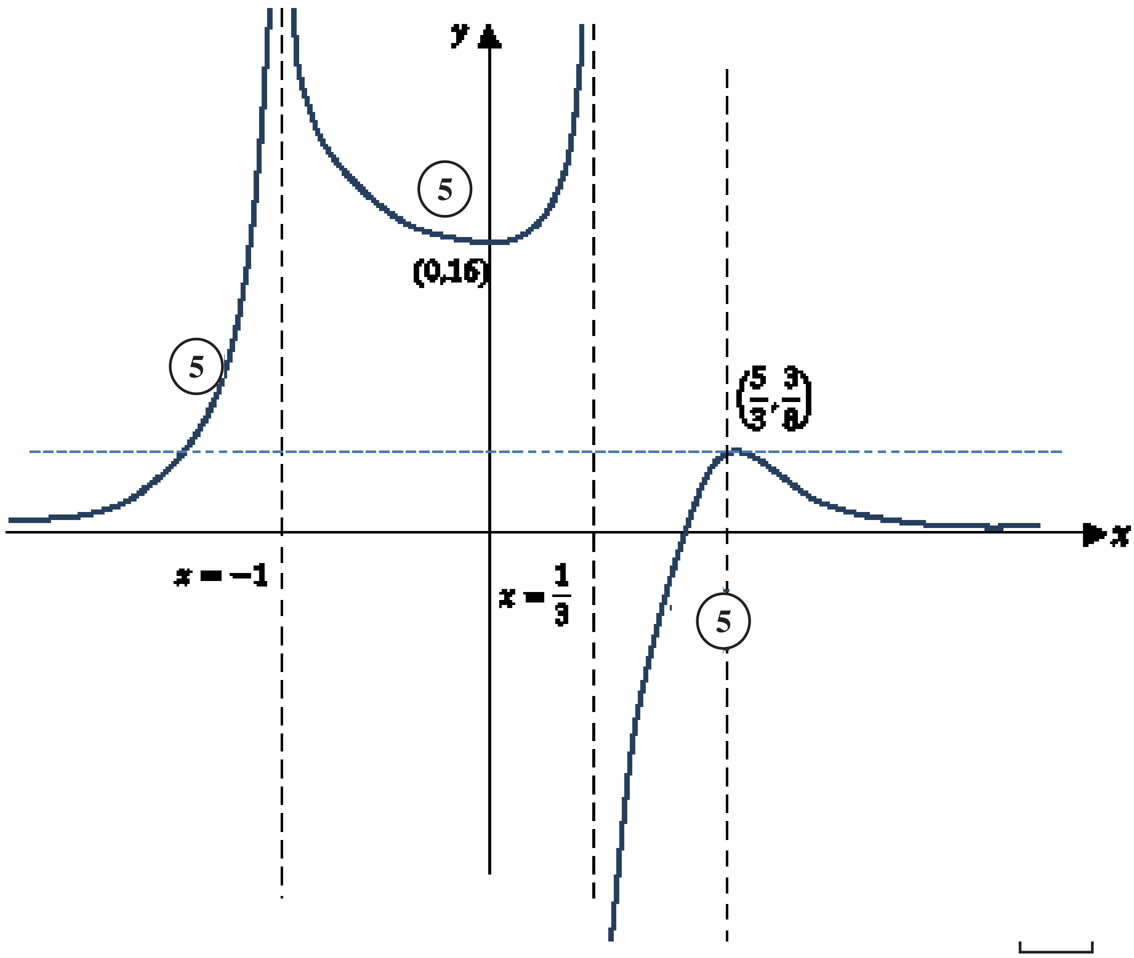
හැරුම් ලක්ෂ්‍යවලදී : $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \frac{5}{3}.$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
$f'(x)$ ලකුණ	(+)	(−)	(+)	(+)	(−)
	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ

5 5 5 5 5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : (0, 16) ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}\ \ \frac{3}{8}\right)$, ස්ථානීය උපරිමයක්.

5 5



$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1).$

$$\Leftrightarrow k = \frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)} \quad 5$$

$k \leq 0$ හෝ $\frac{3}{8} < k < 16$ ම නම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක්
5 5
පමණක් පවතී. **15**

(*b*) පරිමාව : $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$ 10

$$\Rightarrow 391 = 46r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{17}{2r^2}, \quad (r > 0). \quad 5$$

පෘෂ්ඨීක වර්ගඵලය : $S = \pi r(32h + 17r).$

$$= 17\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right) \quad 5$$

5 $\frac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\frac{16}{r^2} + 2r\right) = \frac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$ 5

$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ 5

$0 < r < 2$ විටදී $\frac{dS}{dr} < 0$ සහ $r > 2$ විටදී $\frac{dS}{dr} > 0.$
5 5

$\therefore$ $r = 2$ විටදී S අවම වේ. 5 **50**

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) (i) x^2, x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

(*a*) (i) $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$

සංගුණක සැසඳීමෙන් :

$x^2 \;: -A+B=0$ 5

$x^1 \;: -B+C=0$ 5

$x^0 \;: \quad -C=1$ 5

$A=-1, B=-1$ සහ $C=-1$ 5

20

$1=-x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)+x^3$

$\therefore \; \dfrac{1}{x^3(x-1)}$; භින්න භාග ඇසුරින් :

$\dfrac{1}{x^3(x-1)} = -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x-1}$, ලෙස වේ. 5

එනයින් $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3(x-1)}}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C,$ 5

5 5 5 5

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ.

30

(ii) $\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{x^2\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x\sin 2x\,dx$ 5 5

$= \frac{x^2\sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$ 5 5

$= \frac{x^2\sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. 5 5 5

30

(*b*) $\theta = \tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta\,d\theta = -\sin x\,dx$ 5

$x = 0 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$ 5

$x = \pi \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$ 5

$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta \left(\sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 5 5 5

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)}\,d\theta$ 5

$= \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ 5

$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$ 5

$= \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1).$ 5

50

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi - x)}}\,dx \quad 5$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I \quad 5$$

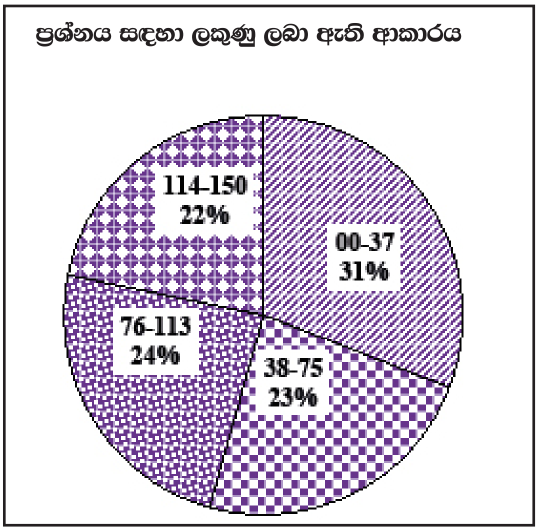
$$\Rightarrow 2I = 2\pi \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow I = \pi \ln(\sqrt{2}+1). \quad 5$$

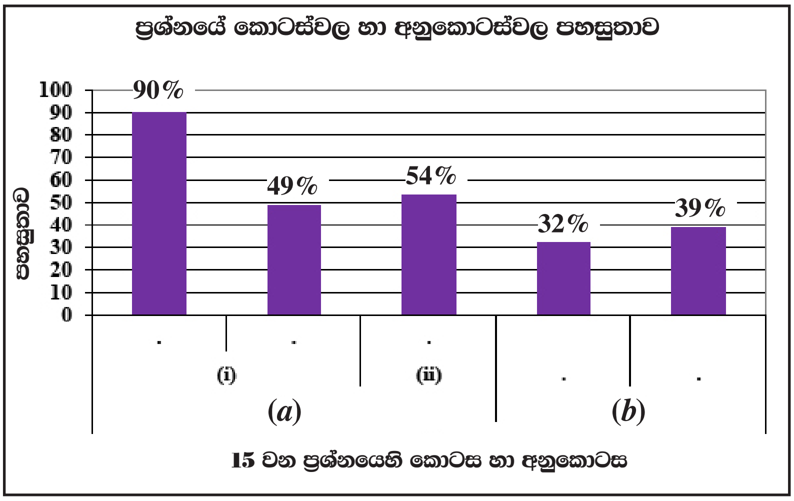
$\boxed{20}$

---

15 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා :



මෙම ප්‍රශ්නය තෝරාගෙන ඇති අපේක්ෂකයන්ගේ ප්‍රතිශතය 81% ක් පමණි. මෙහි පහසුතාව 49% කි. මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා ලකුණු 150 ක් වෙන් කර ඇත.
ඉන්
ලකුණු 00 - 37 ප්‍රාන්තරයේ 31% ක් පමණ ද,
ලකුණු 38 - 75 ප්‍රාන්තරයේ 23% ක් පමණ ද,
ලකුණු 76 - 113 ප්‍රාන්තරයේ 24% ක් පමණ ද,
ලකුණු 114 - 150 ප්‍රාන්තරයේ 22% ක් පමණ ද,
යන ලෙස ලකුණු ලබාගෙන ඇත.



මෙහි අනුකොටස් 5ක් ඇත. වැඩිම පහසුතාව ඇත්තේ (*a*) (i) හි පළමු අනුකොටසට වන අතර එය 90%කි. අඩුම පහසුතාව (*b*) හි පළමු අනුකොටසට වන අතර එය 32%කි.

[8 වන පිටුවේ ප්‍රස්තාරය 5 හා 15 පිටුවේ ප්‍රස්තාරය 12 ට අනුව]

16 වන ප්‍රශ්නය

16. $A \equiv (-2, -3)$ හා $B \equiv (4, 5)$ යැයි ගනිමු. AB රේඛාව සමග l_1 හා l_2 රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 හා l_2 රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් l_1 හා l_2 මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

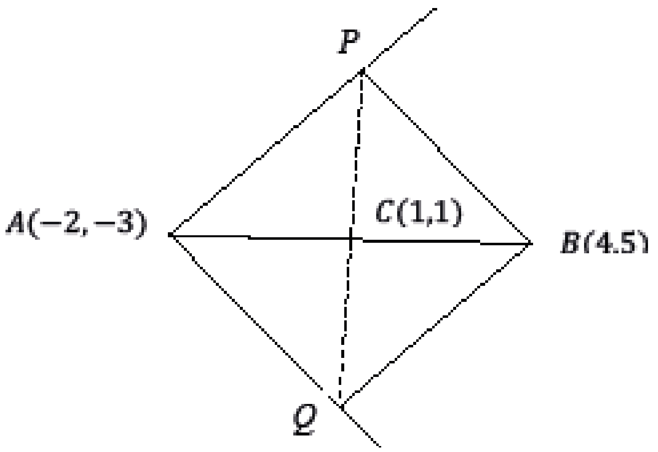
PQ හි සමීකරණය සොයා, P හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද A, P, B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු. $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය, S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

R ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$ විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4m}{3}}\right|$$ 10

$$\Rightarrow \left(m - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{4m}{3}\right)^2$$ 5

$$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7m - 1)(m + 7) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{7}$$ හෝ $$m = -7$$

5 5

∴ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ :

(i) $y + 3 = \frac{1}{7}(x + 2) \Rightarrow x - 7y - 19 = 0,$ 10

සහ

(ii) $y + 3 = -7(x + 2) \Rightarrow 7x + y + 17 = 0.$ 10

$\boxed{45}$

l_1 යනු $x - 7y - 19 = 0$ රේඛාව සහ අනෙක l_2 යැයි ගනිමු.

PQ හි සමීකරණය : $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow \ 3x + 4y - 7 = 0$ 10

l_1 සහ PQ හි ඡේදන ලක්ෂය : $P = (5, -2)$ 5

$Q = (x_0, y_0)$, නම්,

$$\frac{5 + x_0}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = -3$$

5

$$\frac{2 + y_0}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 4$$

$Q = (-3, 4)$. 5

$\boxed{25}$

A, P, B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය AB විශ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. 10

$(y - 5)(y + 3) + (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.

10

$\boxed{20}$

$CR^2 = (4\lambda - 1)^2 + (5\lambda - 1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. 10

දැන් $CR^2 - 25 = (4\lambda - 1)^2 + (5\lambda - 1)^2 - 25$ 5

$= 41\lambda^2 - 18\lambda - 23$

$= (\lambda - 1)(41\lambda + 23) > 0 \quad \text{as } \lambda > 1$. 10

$\therefore$ R ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. 5

$\boxed{30}$

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$ 10

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ 5

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x + 5y - 9 = 0$ හා $x + y + 23 = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. 10

එය අචල ලක්ෂයකි. 5

$\boxed{30}$

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\mathbf{0 \le \theta \le \pi}$ සඳහා $\mathbf{\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)}$ 5 5

$\mathbf{3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta),\ n \in \mathbb{Z}}$ 5

$\mathbf{5\theta = 2n\pi + \pi,\ n \in \mathbb{Z}}$ හෝ $\mathbf{\theta = 2n\pi - \pi,\ n \in \mathbb{Z}}$.

$\mathbf{0 \le \theta \le \pi}$ බැවින් විසඳුම් $\mathbf{\theta = \pi,\ \frac{\pi}{5}}$ හා $\mathbf{\frac{3\pi}{5}}$

5 5 5

$\boxed{30}$

---

5 5

$\mathbf{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$ සහ $\mathbf{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$.

$\therefore$ $\mathbf{\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1}$

$\mathbf{= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1}$, මෙහි $\mathbf{t = \cos\theta}$.

10

$\boxed{20}$

$\therefore\ 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$. 10

$\cos\pi = -1 \Rightarrow t + 1$ යනු $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ හි සාධකයකි.

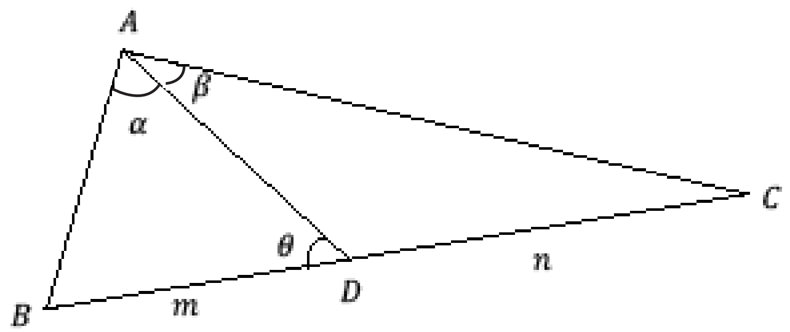
$$\Rightarrow 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$$ 10

$4t^2 - 2t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ 5

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\times4\times1}}{2\times4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$ 5

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 5 $\boxed{35}$

(*b*)



$B\hat{D}A = \theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

$BAD: \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ 10

$ADC: \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi-\theta)}$ 10

$$\Rightarrow \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$ 5 $\boxed{25}$

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc}$$ 5

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$ 5

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$ 5

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

5

$\boxed{20}$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5 $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින්, 2γ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$ 5

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4}$$ 5

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}.$$ 5

$\boxed{20}$
