1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, L.H.S. $= 2 \times 1 - 1 = 1$ හා R.H.S. $= 1^2 = 1$. 5

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

එනම් $\sum_{r=1}^{p} (2r-1) = p^2$. 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} (2r-1) = \sum_{r=1}^{p} (2r-1) + \big(2(p+1)-1\big)$ 5

$= p^2 + (2p + 1)$

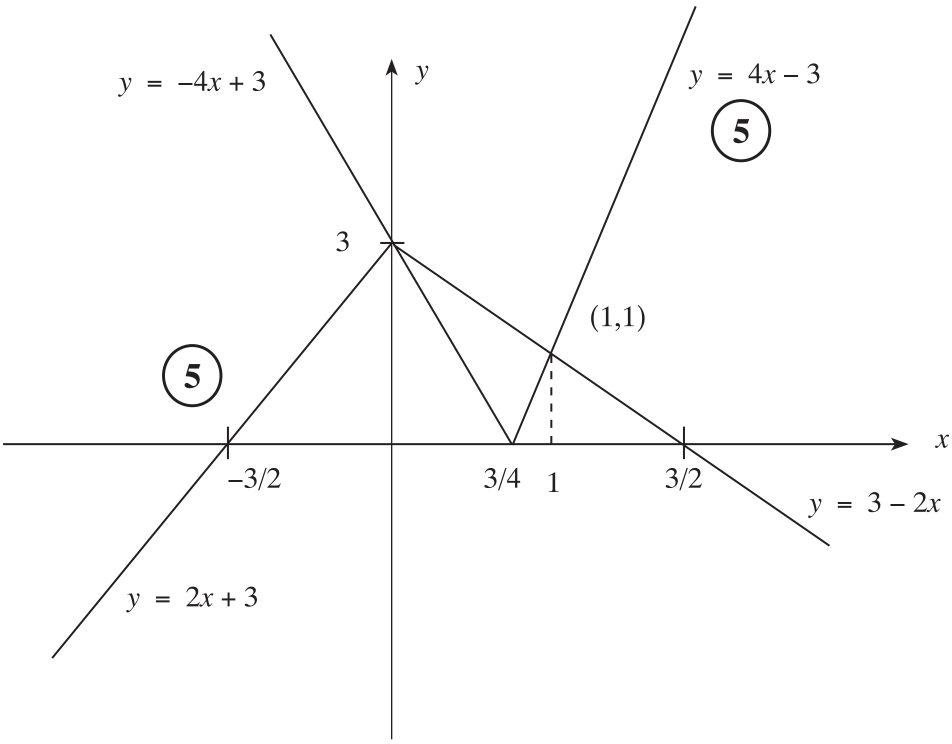
$= (p+1)^2$. 5

ඒ නයින්, $n = p$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලුම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=|4x-3|$ හා $y=3-2|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|2x-3|+|x|<3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



මෙම ප්‍රස්තාරයෙන්හි ඡේදන ලක්ෂවලදී

$$4x - 3 = 3 - 2x \Rightarrow x = 1 \quad 5$$

$$-4x + 3 = 3 + 2x \Rightarrow x = 0$$

ප්‍රස්තාර මගින්,

$|4x-3| < 3 - 2|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$ වේ.

$\therefore \ |4x-3| + |2x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$

x යන්න $\dfrac{x}{2}$, මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

$|2x-3| + |x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 2.$ 5

$\therefore \ |2x-3| + |x| < 3$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන සියලු x අගයන්ගේ කුලකය

$\{x : 0 < x < 2\}$ වේ. 5

25

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5.

<u>x හි අගයන් සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$|2x-3| + |x| < 3$

<u>(i) අවස්ථාව</u> $x \leq 0$:

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 - x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොපවතී.

<u>(ii) අවස්ථාව</u> $0 < x \leq \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x \leq \frac{3}{2}$ වේ.

<u>(iii) අවස්ථාව</u> $x > \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

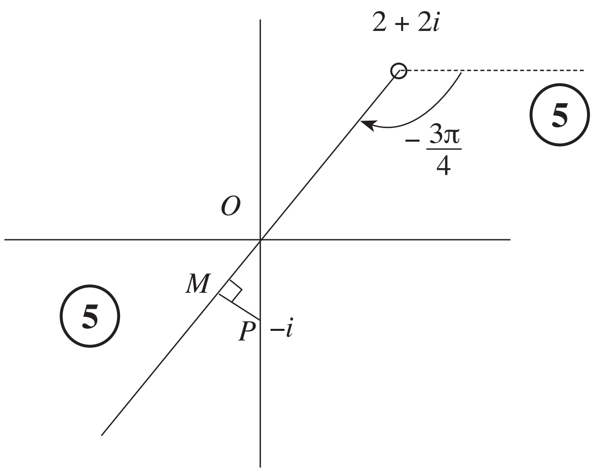
$\Leftrightarrow x < 2$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $\frac{3}{2} < x < 2$ වේ.

අවස්ථා 3 ම නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	10
ඕනෑම අවස්ථා 2 ක් නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	5

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x < 2$ වේ. 5 **25**

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\mathrm{Arg}\left(z-2-2i\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\mathrm{Arg}\left(z-2-2i\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$ වන පරිදි $\left|i\bar{z}+1\right|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$

$= |z+i|$

$= |z-(-i)|$ 5

ඒ නයින්, $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය PM වේ. 5

දැන්, $PM = 1 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 5

25

4. $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකය 35 බව පෙන්වන්න.

ඉහත ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදයක් **නොපවතින** බවත් පෙන්වන්න.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,(x^3)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r} \quad \textcircled{5}$$

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,x^{5r-14}$$

x^6 : $5r-14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ 5

$\therefore x^6$ හි සංගුණකය $= {}^7C_4 = 35$ 5

ඉහත ප්‍රසාරණයට x, වලින් ස්වායත්ත පදයක් තිබීම සඳහා $5r-14 = 0$ විය යුතුය. 5

$r \in \mathbb{Z}^+$ බැවින් මෙය සිදුවිය නොහැක. 5

25

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \dfrac{1}{2\pi}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad 5$$

$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad 5$$

$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad 5$$

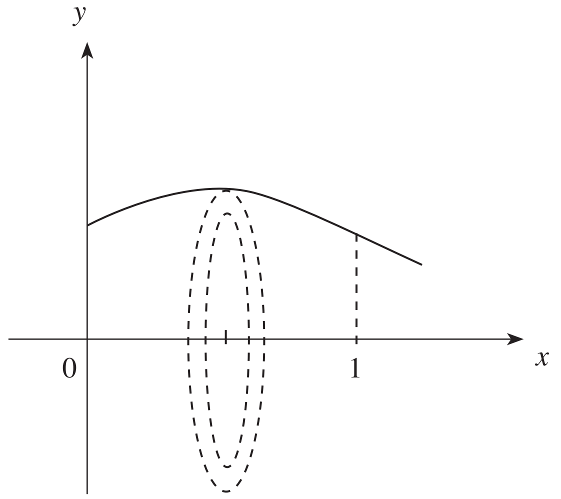
$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$$

5

$$= \frac{1}{2\pi} \quad 5$$

25

6. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x=0,\ x=1$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x - අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(\pi+\ln 4)$ බව පෙන්වන්න.



ජනනය වූ පරිමාව $= \displaystyle\int_0^1 \pi\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)^2 dx$ 5

$= \pi\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)$ 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + \tan^{-1}x\Big|_0^1\right)$ 5 + 5

$= \pi\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(\ln 4 + \pi\right)$ 5

25

7. C යනු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = at^2$ සහ $y = 2at$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන පරාවලය යැයි ගනිමු; මෙහි $a \neq 0$ වේ. C පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $y + tx = 2at + at^3$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
C පරාවලය මත $P \equiv (4a, 4a)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවට එම පරාවලය නැවත $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වේ. $T = -3$ බව පෙන්වන්න.

$x = at^2$, $y = 2at$

$\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$t \neq 0$ සඳහා $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t}$ 5

$\therefore$ අභිලම්බ රේඛාවේ බෑවුම $= -t$

$(at^2, 2at)$ හිදී අභිලම්බයේ සමීකරණය

$y - 2at = -t\ (x - at^2)$ වේ.

$y + tx = 2at + at^3$ 5 (මෙය $t = 0$ සඳහා වලංගු වේ.)

$P \equiv (4a, 4a)$ on $C \Rightarrow t = 2$.

P හිදී අභිලම්බ රේඛාව : $y + 2x = 4a + 8a = 12a$ 5

එය C හිදී $(aT^2, 2aT)$ හමු වන බැවින්

$2aT + 2aT^2 = 12a$. 5

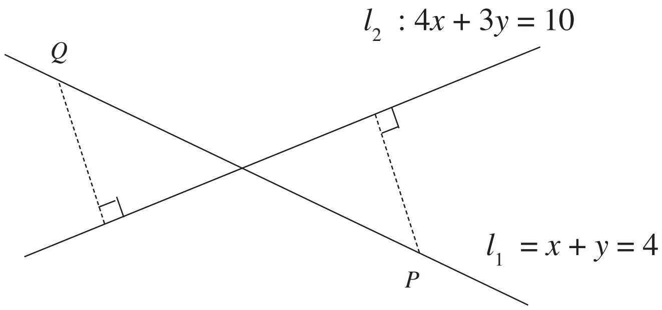
$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T-2)(T+3) = 0$

$\Leftrightarrow T = 2$ හෝ $T = -3$

$\therefore T = -3$ 5

$\boxed{25}$

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y = 4$ හා $4x + 3y = 10$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1ක් වන පරිදි ය. P හි හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_1 මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$(t, 4 - t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැක; මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ යැයි ගනිමු.

P සිට l_2 ට ලම්බ දුර $= \dfrac{\left|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$ 5

$\therefore \ |t_1 + 2| = 5$

$\therefore \ t_1 = -7$ හෝ $t_1 = 3$ 5

P හා Q හි ඛණ්ඩාංක

$(-7, 11)$ හා $(3, 1)$ වේ. 5 + 5

25

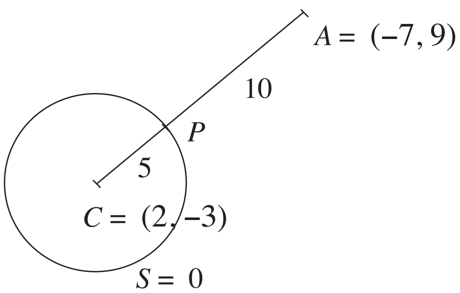
9. $A \equiv (-7, 9)$ ලක්ෂ්‍යය $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. $S = 0$ වෘත්තය මත වූ, A ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නතම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S = 0$ හි කේන්ද්‍රය C කේන්ද්‍රය $(2, -3)$ වේ. 5

$S = 0$ හි R අගය $\sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} =$ වේ. 5

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5.$ 5

$\therefore$ A ලක්ෂ්‍යය දී ඇති වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටයි.



$S = 0$ වෘත්තයට ආසන්නතම A ලක්ෂ්‍යය

CA ට $S = 0$ හමුවන P ලක්ෂ්‍ය වේ.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ 5

$$\therefore \; P \equiv \left(\frac{2 \times 2 + 1(-7)}{3}, \; \frac{2(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

එනම් $P \equiv (-1, 1)$ 5

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා $t = \tan\frac{\theta}{2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.
$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad 5$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad 5 \qquad ; \theta \neq (2n+1)\pi \text{ සඳහා}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

5

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,(1+t^2) = 2\,(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})\,t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \quad 5$$

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3} \quad 5 \qquad \left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$$

$\boxed{25}$

11. (*a*) $p \in \mathbb{R}$ හා $0 < p \leq 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 + 2x + p = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු මෙම සමීකරණයෙහි මූල යැයි ගනිමු. α හා β දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{p^2}{p^2 + p + 2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ හා $\dfrac{\beta}{\beta - 1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(p^2 + p + 2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, මෙම මූල දෙකම ධන වන බවත් පෙන්වන්න.

(*b*) c හා d යනු **නිශ්ශූන්‍ය** තාත්ත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ද $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ යැයි ද ගනිමු. $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බවත්, $(x - d)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය cd බවත් දී ඇත. c හා d හි අගයන් සොයන්න. c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා, $(x + 2)^2$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*a*) $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් යැයි සිතමු.

$x = 1,\ p^2 + 2 + p = 0$ ලැබේ. 5

නමුත් $p > 0 \Rightarrow p^2 + 2 + p > 0$, බැවින් මෙය සිදු විය නොහැක. 5

$\therefore\ p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් නොවේ. $\boxed{10}$

විවේචකය $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ 10

$= 4(1 - p^3)$

$\geq 0\ (\because\ 0 < p \leq 1)$ 5

$\therefore\ \alpha$ හා β දෙකම තාත්ත්වික වේ. 5 $\boxed{20}$

$\alpha + \beta = -\dfrac{2}{p^2}$ හා $\alpha\beta = \dfrac{1}{p}$ 5 + 5

දැන්,

$$\frac{1}{(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{(\beta - 1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1)} \quad 5$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + p + 2}. \quad 5$$

$\boxed{20}$

දැන්

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)\ (\beta-1)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)\ (\beta-1)} \quad 5$$

$$= \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}\right) . \quad \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} . \quad \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad 5$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} . \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\ (\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} . \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{p}{p^2+p+2} . \quad 5$$

ඒ නයින් අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2+p+2}x + \frac{p}{p^2+p+2} = 0 \text{ වේ.} \quad 10$$

$$\Rightarrow \quad (p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0 \quad 5$$

$\boxed{35}$

$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$ හා $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ යන දෙකම තාත්ත්වික වේ.

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} > 0, \ (\because\ p>0), \quad 5$$

සහ $\frac{\alpha}{(\alpha-1)} . \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2+p+2} > 0, \ (\because\ p>0)$.

ඒ නයින් මෙම මූල දෙකම ධන වේ. 5

$\boxed{10}$

(**b**) $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ සාධකයක් බැවින් $f(c) = 0$ වේ. 5

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ 5

$\Rightarrow c^2 (c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because c \neq 0)$ 5

$f(x)$ යන්න $(x - d)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය cd බැවින්

$f(d) = cd.$ 5

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$ 5

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2 (d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because d \neq 0)$ 5

$\therefore \quad c = -2$ හා $d = -1.$ **30**

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ යන්න $(x+2)^2$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $Ax + B$ යැයි ගනිමු.

එවිට $f(x) \equiv (x+2)^2 \, Q(x) + (Ax + B)$; මෙහි $Q(x)$ මාත්‍රය 1 වූ බහු පදයකි.

එබැවින්, $x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2 \, Q(x) + Ax + B$ වේ. 5

$x = -2$, ආදේශයෙන් $0 = -2A + B$ ලැබේ. 5

අවකලනය කිරීමෙන්

$$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 \, Q'(x) + 2Q(x)(x+2) + A \text{ වේ.}$$ 5

නැවත $x = -2$ ආදේශයෙන්

$12 - 8 + 1 = A$ ලැබේ. 5

$\therefore \quad A = 5$ හා $B = 10$

ඒ නයින්, ශේෂය $5x + 10.$ 5 **25**

වෙනත් ක්‍රමයක්

දීර්ඝ බෙදීම මගින්

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\
 & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\
 & \qquad 5x + 10.
\end{array}
$$

15

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x^2 + 4x + 4)(x - 2) + (5x + 10)$$

$\therefore$ අවශ්‍ය ශේෂය $5x + 10$ වේ. 10

$\boxed{25}$

12. (*a*) P_1 හා P_2 යනු පිළිවෙළින් $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ මගින් දෙනු ලබන කුලක දෙක යැයි ගනිමු. $P_1 \cup P_2$ න් ගනු ලබන වෙනස් අකුරු 3 කින් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 කින් යුත්, අවයව 6 කින් සමන්විත මුරපදයක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. පහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් මුරපද ගණන සොයන්න:

(i) අවයව 6 ම P_1 න් පමණක් ම තෝරා ගනු ලැබේ,

(ii) අවයව 3 ක් P_1 න් ද P_2 න් අනෙක් අවයව 3 ද තෝරා ගනු ලැබේ.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(***a***) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 න් පමණක්ම වෙනස් අක්ෂර 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් අක්ෂර ගණන $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ 10

ඒ නයින්, අවයව 6 ම P_1 ගෙන සෑදිය හැකි මුර පද ගණන $= {}^5C_3 \,.\, {}^4C_3 \,.\, 6\,!$ 5

$= 28800$ 5

20

(ii)

තෝරිය හැකි වෙනස් ආකාර				මුර පද ගණන	
P_1 න්		P_2 න්			
අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6\,! = 28800$	10
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6\,! = 864000$	10
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6\,! = 864000$	10
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6\,! = 28800$	10

ඒ නයින්, අවයව 3 ක් P_1 න් ද, අනෙක් අවයව 3 ක් P_2 න් ද තෝරාගෙන සෑදිය හැකි

වෙනස් මුර පද ගණන $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

10

$\boxed{50}$

(b) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

එවිට,

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)} \quad 5$$

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)} \quad 5$$

$$= 6U_r \quad 5$$

$\boxed{15}$

එවිට,

$$\begin{aligned}
r &= 1; & 6U_1 &= V_1 - \cancel{V_3}, \\
r &= 2; & 6U_2 &= V_2 - \cancel{V_4}, \\
r &= 3; & 6U_3 &= \cancel{V_3} - V_5, \\
r &= 4; & 6U_4 &= \cancel{V_4} - V_6, \\
&\vdots & &\vdots \\
r &= n-3; & 6U_{n-3} &= V_{n-3} - \cancel{V_{n-1}} \\
r &= n-2; & 6U_{n-2} &= V_{n-2} - \cancel{V_n} \\
r &= n-1; & 6U_{n-1} &= \cancel{V_{n-1}} - V_{n+1} \\
r &= n; & 6U_n &= \cancel{V_n} - V_{n+2}
\end{aligned}$$

10

10

$$\therefore \quad 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad 10$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad 5$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad 5$$

40

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad 5$$

10

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \right) \quad 5$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad 5$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{5}{144}$ වේ. 5

15

13.(*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ යනු $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි වූ න්‍යාස යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$a = 2$ හා $b = 1$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\mathbf{C}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$, හා

(ii) $z_2 \neq 0$ සඳහා $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

බව පෙන්වන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ බව සත්‍යාපනය කර,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)$ යැයි ගනිමු.

$1 + \omega$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r(>0)$ හා $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $$AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

5 10

$$AB^T = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 2a - 3 = b, \quad a - 4 = -2$ සහ $a = b + 1.$ 10

$\Leftrightarrow a = 2$ සහ $b = 1$, (ඉහත ඕනෑම සමීකරණ දෙකකින්) මෙම අගයන් ඉතිරි සමීකරණය ද තෘප්ත කරයි. 5

30

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

$\therefore C^{-1}$ නොවතී. 5

10

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

C^{-1} පැවතීම සඳහා :

$p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5$$

5

$\Rightarrow p - 2r = 1,\ -p + 2r = 0,\ q - 2s = 0$ හා $-q + 2s = 1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore C^{-1}$ නොපවතී. 5

10

$$P = \frac{1}{2}(C - 2I) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 10$$

$$2P(Q + 3I) = P - I$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(Q + 3I) = I - P^{-1} \quad 5$$

$$\therefore \quad 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad 5$$

30

(*b*) $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$

(i) $z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$$\text{Re}\, z = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad 5$$

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ හා $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ යැයි ගනිමු.

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \times (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \frac{\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{1}$$

5 5

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad 5$$

20

$$z_1 + z_2 \neq 0 \text{ සඳහා } \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$$

5 (i) මගින් 5 (ii) මගින්

10

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1 \quad 5$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1 \quad 5$$

10

$$\Rightarrow \quad 1 = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) \le \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right| \quad \text{(i)} \; 5 \text{ මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad \text{(ii) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (\because |z_1 + z_2| > 0)$$

දැන් $z_1 + z_2 = 0$ එවිට

$$|z_1 + z_2| = 0 \le |z_1| + |z_2|$$

ඒ නයින්, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **10**

(c) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\, i)$

$$1 + \omega = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad 5$$

මෙහි $r = \sqrt{3}$ හා $\theta = -\frac{\pi}{6}$. 5 **10**

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය මගින් $(1 + \omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[\cos(10\theta) + i\sin(10\theta)\right]$ 5

$$1 + \overline{\omega} = \overline{1 + \omega} = \sqrt{3}(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{3}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow (1 + \overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10}\left[(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)\right] \quad 5$$

$$\therefore (1 + \omega)^{10} + (1 + \overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10} \times 2\cos(10\theta) \quad 5$$

$$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 243. \quad 5$$

20

---

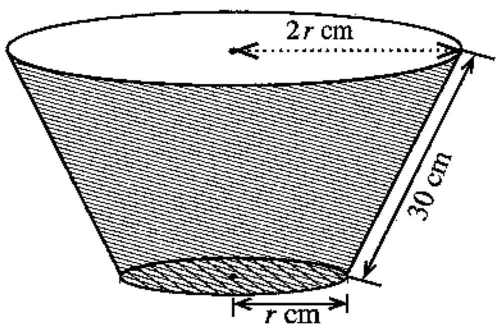
14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 3$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, y – අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18(x^2-33)}{(x-3)^5}$ **බව දී ඇත.** $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල x – ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් පතුලක් සහිත ඍජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක ආකාරයෙන් වූ බේසමක් පෙන්වයි. බේසමෙහි ඇල දිග 30 cm ක් ද උඩත් වෘත්තාකාර දාරයෙහි අරය පතුලෙහි අරය මෙන් දෙගුණයක් ද වේ. පතුලේ අරය r cm යැයි ගනිමු.



බේසමේ පරිමාව $V\,\text{cm}^3$ යන්න $0 < r < 30$ සඳහා

$V = \dfrac{7}{3}\pi r^2\sqrt{900 - r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

බේසමේ පරිමාව උපරිම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(*a*) $x \neq 3$ සඳහා ; $f(x) = \dfrac{9(x^2-4x-1)}{(x-3)^3}$

එවිට

$$f'(x) = 9\left[\frac{1}{(x-3)^3}(2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right] \quad 20$$

$$= 9\left[\frac{2x^2-10x+12-3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right]$$

$$= \frac{-9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \quad \text{for } x \neq 3 \quad 5$$

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \therefore\ y = 0.$ 5

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 3.$ 5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හිදී $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3$ හා $x = 5.$ 5

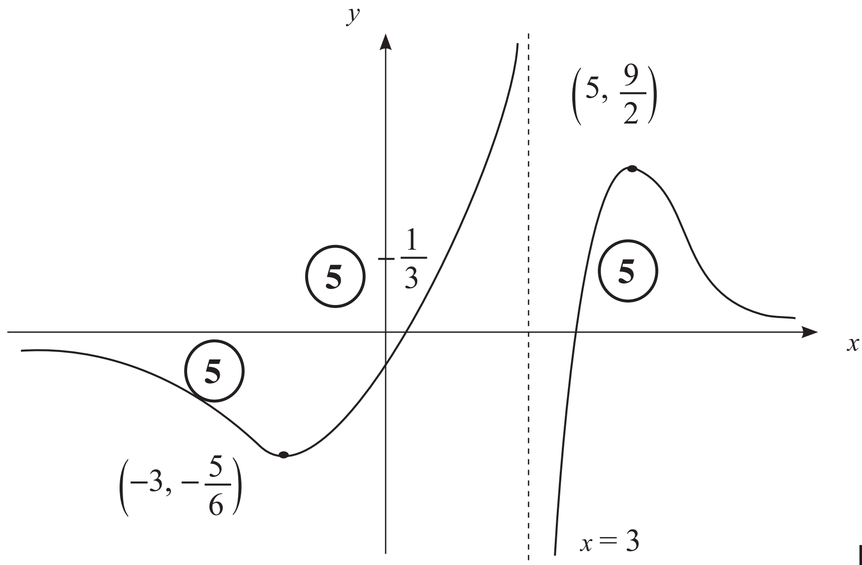
	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
$f^{/}(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$

5 5 5 5

$f(x)$ is ↘ ↗ ↗ ↘

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත : $\left(-3, -\frac{5}{6}\right)$ ස්ථානීය අවමයක් ද $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් ද වේ.

5 5



60

$x \neq 3$ සඳහා ;

$$f^{//}(x) = \frac{18\,(x-\sqrt{33}\,)\,(x+\sqrt{33})}{(x-3)^5} .$$

$f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{33}$. 5

	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f^{//}(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
අවකලතාවය	යටි අවතල	උඩු අවතල	යටි අවතල	උඩු අවතල

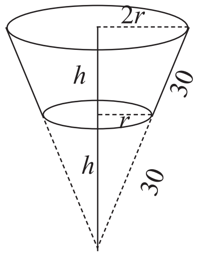
10

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. :

$x = -\sqrt{33}$ හා $x = \sqrt{33}$ එම නතිවර්තන x– ඛණ්ඩාංක වේ. 5

20

(*b*)



$0 < r < 30$ සඳහා ;

$h = \sqrt{900 - r^2}$ 5

පරිමාව V යන්න

$V = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් දෙනු ලැබේ. 5

$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$. 5

15

$0 < r < 30$ සඳහා

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi\left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2 \frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right]$$ 5

$$= \frac{7}{3}\pi\left[\frac{2r(900 - r^2) - r^3}{\sqrt{900 - r^2}}\right]$$

$$= 7\pi r \frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}} .$$ 5

$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$ 5

$0 < r < 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} > 0$ හා $r > 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} < 0$

5 5

$r = 10\sqrt{6}$ විට V අවම වේ. 5

30

---

15. (a) $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ අගයන්න.

(b) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \displaystyle\int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int \ln(x-k)\,dx$ සොයන්න; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int f(t)\,dt$ සොයන්න.

(c) a හා b නියත වන $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ හි අගය සොයන්න.

(a) $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ සඳහා :

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ 5

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ 5

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ 5

එවිට $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ 5

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ 5

$= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ 5

$= 2\left(\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ 5

$= \dfrac{\pi}{2} - 1$ 5

40

(b) $x \neq 1, 2$ සඳහා

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

x හි බලවල සංගුණක සැපයීමෙන් :

x^1 : $A + B = 0$ 5

x^0 : $-2A - B = 1$ 5

$A = -1$ හා $B = 1$ 5

එවිට $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$ 10

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

5 5 5

40

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$= \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^t$ 5

$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ for $t > 2$. 5

10

$\displaystyle\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx$ 5

$\displaystyle = x\ln(x-k) - \int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx$ 5

$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C$ 5

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

15

$\displaystyle\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt$ 5

$= (t-2)\ln(t-2) - t - \Big[(t-1)\ln(t-1) - t\Big] + t\ln 2 + D$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, මෙහි D යනු අභිමත නියතයකි.

5

10

(c) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (a+b-x)\, dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\, dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\, dx \quad 5$$

$\boxed{10}$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\, dx \quad 5$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\, dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad 5$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

16. $12x-5y-7=0$ හා $y=1$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

P යනු l මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda+1, 2\lambda+1)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

$B \equiv (6,0)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S+\lambda U=0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $S \equiv x^2+y^2-7x-y+6$ හා $U \equiv -3x-2y+18$ වේ.

$S=0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය බව **අපෝහනය** කරන්න.

$U=0$ යනු l ට ලම්බව, B හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න.

සියලු $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S+\lambda U=0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත මත වූ ද B වලින් ප්‍රභින්න වූ ද අචල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය, $S+\lambda U=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$12x-5y-7=0$ හා $y=1 \Rightarrow x=1, \quad y=1$

$\therefore \; A \equiv (1,1)$ 10

$\boxed{10}$

සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{12x-5y-7}{13} = \pm \frac{(y-1)}{1} \quad 10$$

$\Rightarrow \; 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7 = -13(y-1)$

$\Rightarrow \; 2x-3y+1 = 0$ or $3x+2y-5 = 0$ 5 + 5

$y=1$ හා $2x-3y+1 = 0$ අතර කෝණය සුළු θ නම්

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right| = \frac{2}{3} < 1 \text{ වේ.} \quad 5$$

$\therefore \; l: \; 2x-3y+1=0.$ 5

$\boxed{30}$

---

l මත වූ (x, y) ලක්ෂ්‍යය සඳහා

$\dfrac{(x-1)}{3} = \dfrac{(y-1)}{2} = \lambda$ (යැයි ගනිමු.) 5

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \quad y = 2\lambda + 1.$ 5

$\boxed{10}$

$\therefore \; P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

දැන් $B \equiv (6, 0)$ හා $P \equiv (3\lambda + 1, \; 2\lambda + 1)$

$\therefore$ BP විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x-6)\;(x - (3\lambda+1)) + (y-0)\;(y-(2\lambda+1)) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ. 10

එනම් $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ 5

මෙය $S + \lambda U = 0,$ ආකාරයෙන් වේ. මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

5 5

$\boxed{25}$

$S = 0$ යන්න $\lambda = 0$ ට අනුරූප වේ. $\Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ 5

$\therefore$ $S = 0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තය වේ. 5

l හි බෑවුම $\dfrac{2}{3}$ නිසා l ට ලම්බව B හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය $3x + 2y + \mu = 0$ වේ;

මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. 10

B ලක්ෂ්‍යය $3x + 2y + \mu = 0$ මත බැවින් $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $3x + 2y - 18 = 0$ වේ.

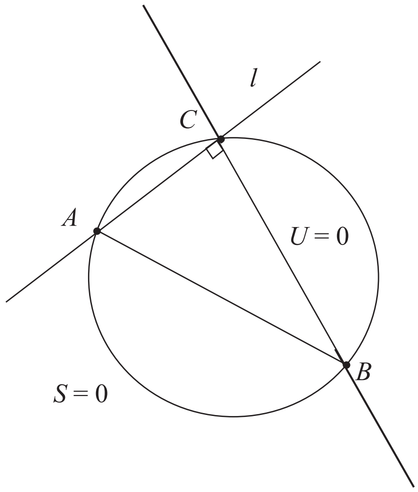
එනම් $U = -3x - 2y + 18 = 0.$

$\boxed{20}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S + \lambda U = 0$ යන්න $S = 0$ හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි. 10

මෙම ලක්ෂ්‍ය වලින් එකක් B වන අතර අනෙක් C ලක්ෂ්‍යය l හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

10



$\therefore$ C හි ඛණ්ඩාංක

$$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$$

හා $l \equiv 2x - 3y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$ හා $y = 3$

$\therefore$ $C \equiv (4, 3)$. 5

25

$S = 0$ හා $S + \lambda U = 0$ ප්‍රලම්බ වේ.

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$$

5 5 5

$\Leftrightarrow$ $13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 2.$

5

20

---

17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B) \text{ හා}$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ සඳහා $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{C}B = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (*a*) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න. **ඒ නයින්,** $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— (1) **5**

දැන් $\sin(A-B) = \sin(A+(-B))$ **5**

$= \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— (2) **5** $\boxed{15}$

---

(1) + (2) $\Rightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ **5**

(1) − (2) $\Rightarrow \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ **5** $\boxed{10}$

$\boxed{0<\theta<\frac{\pi}{2}.}$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta + \sin\theta = \sin 7\theta$ **5**

$\Leftrightarrow \sin 7\theta - \sin 5\theta - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta+\theta) - \sin(6\theta-\theta) - \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta - \sin\theta = 0$ **5**

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0<\theta<\frac{\pi}{2}, \sin\theta > 0$

5

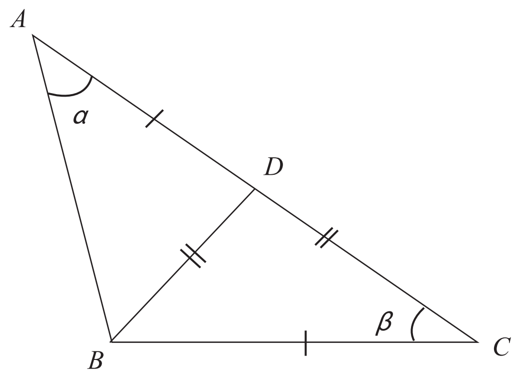
$$\Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; n \in \mathbb{Z}. \quad 5 + 5$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \quad 5$$

30

(b)



$C\hat{B}D = \beta$, $A\hat{D}B = 2\beta$,

හා $A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

සයින් නීතිය යෙදීමෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D} \quad 10$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha + 2\beta)} \quad 5 \quad \text{———} \quad (1)$$

BDC ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C} \quad 10$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad \text{———} \quad (2) \quad 5$$

$\because$ $BD = DC$ and $AD = BC$, (1) න් හා (2) න්

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} \quad 5$$

$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ 5

40

$\alpha : \beta = 3 : 2$, නම්

$2\sin\alpha\cos\dfrac{2\alpha}{3} = \sin\dfrac{7\alpha}{3}$ වේ. 5

$\Rightarrow \quad 2\sin 3\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)$ 5

$\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\pi}{18}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{15\pi}{18}, \dfrac{21\pi}{18}$ 5

$\because \; BC = AD < AC$, α සුළු කෝණයක් විය යුතුය.

$\therefore \; \alpha = \dfrac{\pi}{6}.$ 5

20

(c) $\quad 2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ යැයි ගනිමු. $x \neq \pm 1$ බව දනිමු.

එවිට $\quad 2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}.$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$ 5

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cot\beta$ 5

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{x+1}$ 5

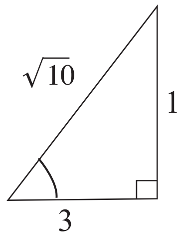
$\Leftrightarrow \quad 2x = 1 - x \quad (\because \; x \neq \pm 1)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}.$ 5

25

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$ 5

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$ 5

$\boxed{10}$
