1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore\ n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} (4r+1) = k(2k+3)$ වේ. 5

$$\text{දැන්, } \sum_{r=1}^{k+1} (4r+1) = \sum_{r=1}^{k} (4r+1) + \{4(k+1)+1\}$$
$$= k(2k+3) + (4k+5) \quad 5$$
$$= 2k^2 + 7k + 5$$
$$= (k+1)(2k+5) \quad 5$$
$$= (k+1)[2(k+1)+3]$$

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

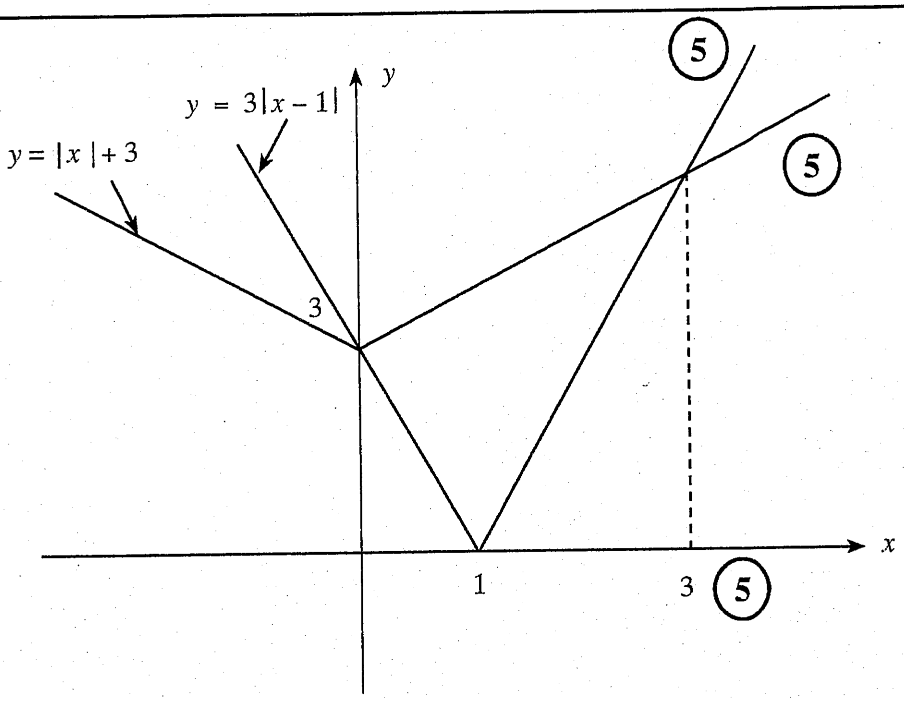
ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=3|x-1|$ හා $y=|x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1|>2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x+3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$, මෙහි $u = 2x$.   5

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$.   5

25

විකල්ප ක්‍රමය I :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$3\,|2x-1| > 2\,|x|+3$$

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3\,(2x-1) > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 8x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 3 ම සඳහා 10

නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා 5

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x < 0}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

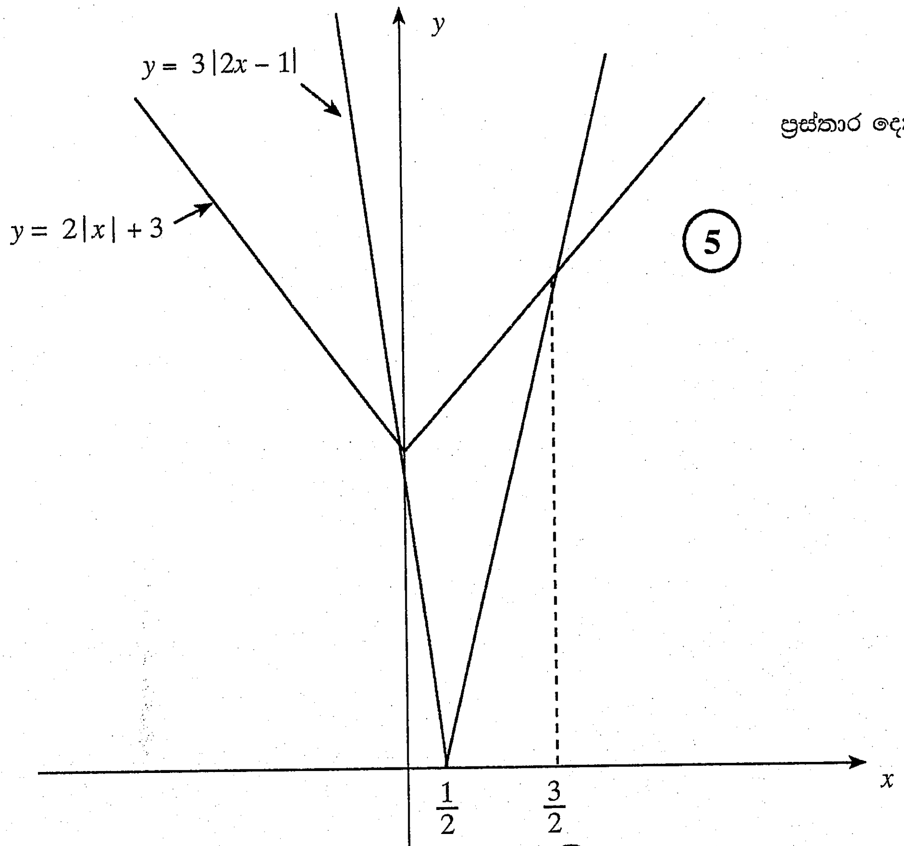
$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය II :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5 .

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :



ප්‍රස්තාර දෙකම සඳහා 5

5

ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x|+3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ or $x > \frac{3}{2}$. 5

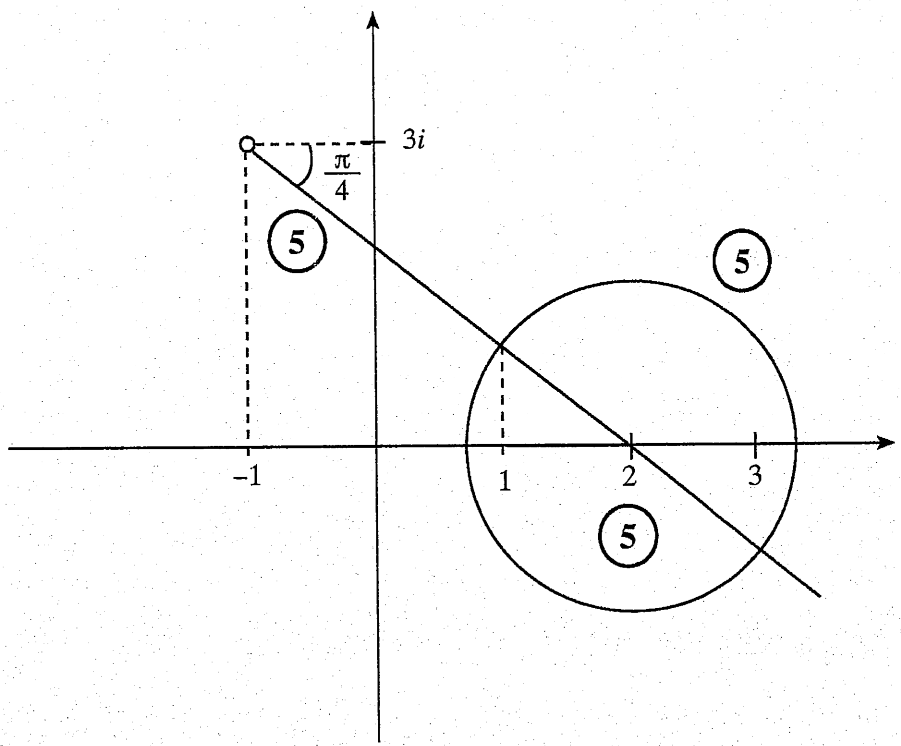
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\text{Arg}(z+1-3i) = -\dfrac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1+i$ 5 හා $3-i$ වේ. 5

25

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r, \text{ මෙහි } {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad r = 1, 2, \ldots, n \text{ සඳහා}$$

5 5

හා ${}^nC_0 = 1.$

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; 5 මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots\ n-1\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r+1)!\ (n-r-1)!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-r} = \dfrac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n - r = r + 1$

$\Leftrightarrow n = 2r + 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

25

වෙනත් ක්‍රමයක් :

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; 5 මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-(r-1)} = \dfrac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n - r + 1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r - 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})} \times \frac{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})}{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(3x-\pi)} \cdot (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}) \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3(x-\frac{\pi}{3})} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot (\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi})$$

5 5

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

<u>විකල්ප ක්‍රමය :</u>

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})} \times \frac{(x-\frac{\pi}{3})}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5 5

$$= \left[\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \frac{u-1}{u^2}\,du$; මෙහි $u = 1 + e^x$. 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \pi \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \pi \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

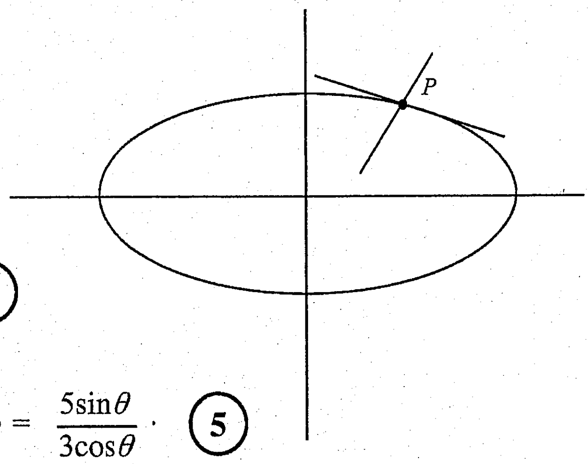
$= \dfrac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\}$ 5

$\boxed{25}$

7. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ඉලිප්සයට එය මත $P \equiv (5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x - 3\cos\theta\, y = 16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.

$x = 5\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$



$\dfrac{dx}{d\theta} = -5\sin\theta, \quad \dfrac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta.$ 5

$\sin\theta \neq 0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ 5

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා P හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$. 5

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා $y - 3\sin\theta = \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x - 5\cos\theta)$ වේ. 5

$$5\sin\theta x - 3\cos\theta y = 16\sin\theta\cos\theta.$$

$\cos\theta = 0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. (P යන්න y – අක්ෂය මත පිහිටන විට)

y – අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y = -\dfrac{16}{3}\sin\theta.$

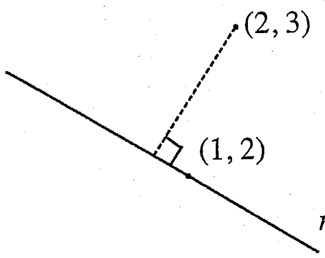
නමුත්, $3\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. 5

$\therefore$ අවශ්‍ය y – අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0, -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

25

8. $m \in \mathbb{R}$ හා l යනු $A \equiv (1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B \equiv (2, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.



l හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x - 1)$ වේ. 5

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$ 5

$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - m)^2$ 5

$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad (2m - 1)(m - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2}$ or $m = 2.$ 5

$\boxed{25}$

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
ඒ නයින්, A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S : (x+2)^2 + y^2 = r^2$ 5

මෙය $(-1, \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \ 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \ 4 = r^2.$

ඒ නයින් S හි සමීකරණය $(x+2)^2 + y^2 = 4.$ 5

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ ---------------- (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x+1) = 0$ වේ. 5

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2$, (1) හි ආදේශ කරමු. 5

එවිට, $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. 5

25

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.
$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
ඒ නයින්, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---------------- (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, (1) න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. (5)

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. (5)

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. (5)

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. (5)

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$. (5)

$\boxed{25}$

11. (a) $f(x)=x^2+px+c$ හා $g(x)=2x^2+qx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p,q\in\mathbb{R}$ හා $c>0$ වේ. $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha=p-q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p>0$ නම් $p<q<2p$ බව,

(ii) $f(x)=0$ හි විවේචකය $(3p-2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x)=0$ හි හා $g(x)=0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta=2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2+3(2p-q)x+(2p-q)^2=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a,b,c\in\mathbb{R}$ වේ. x^2-1 යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b=-1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න x^2-2x මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x+k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k\in\mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x-\lambda)^2(x-\mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ වේ.

(a) α යනු $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2+p\alpha+c=0$ —— 1 හා 5 $2\alpha^2+q\alpha+c=0$ වේ. 5

$\therefore\ \alpha^2+(q-p)\alpha=0$ හා එබැවින් $\alpha[\alpha-(p-q)]=0$ වේ.

5

ඒනයින්, $\alpha=p-q$. 5 $(\because\ c>0\Rightarrow\alpha\neq 0)$

20

---

1 $\Rightarrow c=-\alpha(\alpha+p)$ 5

$=-(p-q)(2p-q)$ 5 (α සඳහා ආදේශයෙන්

$=-(q-p)(q-2p)$.

10

(i) $c>0,\ \Rightarrow (q-p)(q-2p)<0.$ 5

$\therefore$ p හා $2p$ අතර q පිහිටයි.

$p>0$ නම් $p<2p$ වන බැවින් $p<q<2p$ වේ. 5

10

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2\ ]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

$\boxed{15}$

$\alpha + \beta = -p.$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}.$ 5

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ 5 $(\because\ \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

විකල්ප ක්‍රමයක්

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha r = \dfrac{c}{2}$ 5

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

$\boxed{15}$

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)\ (x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. 10

තවද, $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p-2q) = \dfrac{3}{2}\ (q-2p).$ 5

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}.$

$\therefore\ \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2.$ 5

$x^2 - \dfrac{3}{2}\ (q-2p)x + \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2 = 0.$ 5

$2x^2 + 3(2p-q)x + (2p-q)^2 = 0.$

$\boxed{25}$

(b) (x^2-1) යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1)=0$ හා $h(-1)=0$ වේ. 5

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ —— (1) හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— (2) වේ.

5   5

(1) − (2) මගින් $2+2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore\ b = -1.$ 5

20

$h(x) = p(x).(x^2-2x) + 5x + k$ 5

$h(0) = k.$ 5

$\therefore\ k = c.$

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 5

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 5

(1) + (2), මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ 5

25

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)(x^2-1)$ 5

$= (x+1)^2(x-1).$ 5

10

$(\lambda = -1\ ,\ \mu = 1.)$

---

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (*a*) P = පියානෝ වාදකයින් (5), G = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

FS – ගායිකාවන් (3)

MS – ගායකයන් (7)

P	G	S	ආකාර ගණන
2	4	5	$^{5}C_2 \; ^{5}C_4 \; ^{10}C_5 = 12600$ (10) (5)
2	5	4	$^{5}C_2 \; ^{5}C_5 \; ^{10}C_4 = 2100$ (10) (5)

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ (5)

35

P	G	FS	MS	ආකාර ගණන
2	4	2	3	10 ${}^{5}C_2\ {}^{5}C_4\ {}^{3}C_2\ {}^{7}C_3 = 5250$ 5
2	5	2	2	10 ${}^{5}C_2\ {}^{5}C_5\ {}^{3}C_2\ {}^{7}C_2 = 630$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ 5

35

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \quad \text{හා} \quad V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. 5

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)} \quad \text{හා}$$

ඒ නයින්, $3r-2 = Ar - B(r+2)$ $\quad r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

5

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$$\left.\begin{array}{ll} r^1: & 3 = A - B \\ r^0: & -2 = -2B \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = 4 \ \ 5 \\ B = 1 \ \ 5 \end{array}$$

20

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$r = 1; \quad U_1 = V_1 - \cancel{V_2}$$

$$r = 2; \quad U_2 = \cancel{V_2} - \cancel{V_3} \quad 5$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r = n-1; \quad U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - \cancel{V_n}$$

$$r = n; \quad U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1} \quad 5$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad 5$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right) \quad 5$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}. \quad 5$$

$$\boxed{25}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right\} \quad 5$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})\ (1+\frac{2}{n})}\right\}$$

$$= 1. \quad 5$$

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේඪිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. 5

$$\boxed{15}$$

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2\sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r. \quad 5$$

$$\boxed{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad 5$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. 5

$\boxed{10}$

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(*a*) $A^T B = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore\ A^T B - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

$\boxed{20}$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

$\boxed{10}$

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \; C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

10

$CPC \;\; = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC \; = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC \; = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P \;\; = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \; P \; = \; 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\quad = \; 2 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$\quad = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\quad = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

20

(b) $z \; = \; x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\overline{z} \quad = (x + iy)(x - iy)$ 5

$\quad = x^2 - i^2y^2$

$\quad = x^2 + y^2$

$\quad = |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = \; z\overline{z}$. 5

10

$$|z-w|^2 = (z-w)\ \overline{(z-w)} \quad 5$$

$$= (z-w)\ (\overline{z}-\overline{w}) \quad 5$$

$$= z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$$

$$= |z|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

$\boxed{15}$

$$|1-\overline{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |z\overline{w}|^2 \longrightarrow 2 \quad 5$$

1 − 2 මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\overline{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\overline{w}|^2 \text{ ලැබේ.} \quad 5$$

$$= -(1-|w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2) \quad 5$$

$$= -(1-|z|^2)(1-|w|^2) \quad 5 \longrightarrow 3$$

$\boxed{20}$

$|w| = 1$, බැවින් 3 න් $|z-w|^2 - |1-z\overline{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\overline{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l}\because z \neq w \\ \Rightarrow z\overline{w} \neq 1\end{array}\right]$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| = 1$ 5

$\boxed{10}$

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 5

$\boxed{10}$

$(1+\sqrt{3}\,i)^m\,(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3} + i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ 5

$\therefore\; 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$

$\Rightarrow m+n = 8$ හා $(m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi\;;\; k\in\mathbb{Z}.$

5 5

$\boxed{25}$

---

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

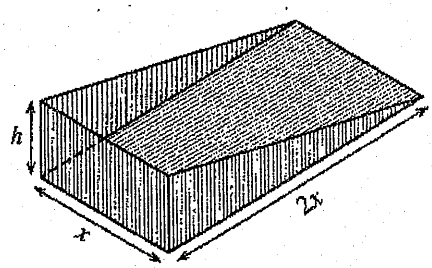
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(*a*) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x - 3 + 2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$= \dfrac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. 5

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ 5

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$f(x)$ is	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.

5 5 5

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

20

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ.
5

05

$x \neq 3$; සඳහා $f''(x) = \frac{18x}{(x-3)^4}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ 5

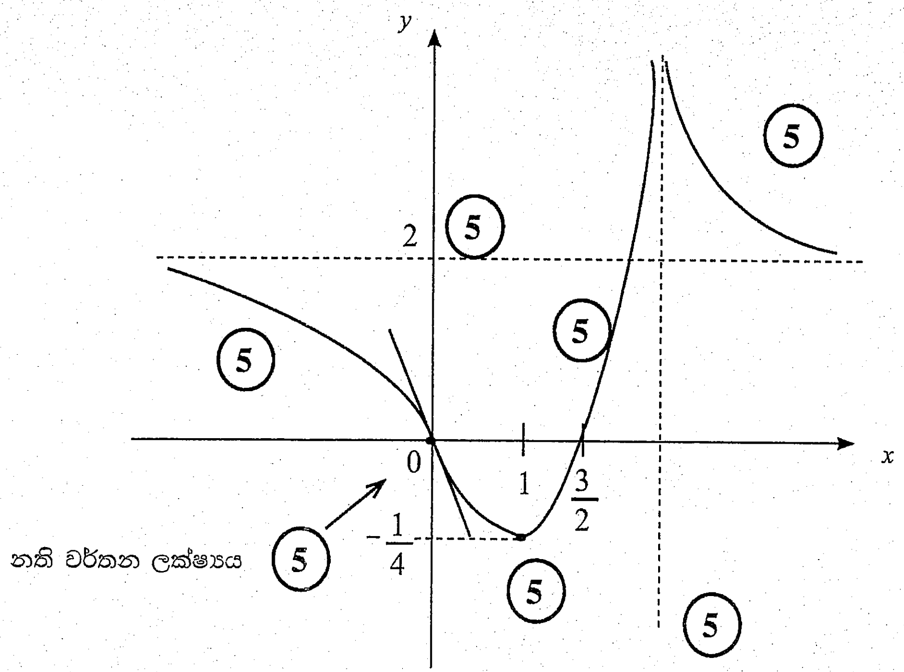
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
අවතලභාවය	පහලට අවතල වේ. 5	ඉහලට අවතල වේ. 5

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය $= (0, 0).$ 5

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore \; y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ 5



45

(*b*) $x^2 h \quad = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$

5

$$\therefore \quad \frac{dS}{dx} \quad = 4x - 3 \times 4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$

5

$\frac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore\ x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

$\boxed{35}$

---

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

$x^3 : \ 1 = A.$ 5

$x^0 : \ -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

5 5

විකල්ප ක්‍රමයක්:

ආදේශයෙන්

$x = -1 : \ -30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0 : \ -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

$\boxed{15}$

$$\therefore \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9}.$$ 10

$$\int \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$ 5

5 5 5

$\boxed{30}$

(b) $\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x (1 - \cos 2\pi x) \ \mathrm{d}x$ 5

$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x}_{I}$ 5

$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I.$ ——— (1) 5

දැන්, $I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x$

$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}$ 5 $- \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \ \mathrm{d}x$ 5

$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x}_{I}\right]$ 5 5

$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I.$ 5 5

$\therefore I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$

$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1}.$ 5

$\therefore$ (1) න්, $\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$ 5 + 5

$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$

$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2}.$

60

(c) $$I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \, \sin^3 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} \, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^6 x \sin^3 x \quad 5 \quad 5$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \, \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \, \sin^3 x \, dx}_{I} \cdot \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \, \sin^3 x \, dx \cdot \quad 5$$

20

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \, \sin^3 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \, \sin^2 x \, \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \, (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right] \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\underset{5}{\left. \frac{-\cos^7 x}{7} \right|_0^{\pi}} + \underset{5}{\left. \frac{\cos^9 x}{9} \right|_0^{\pi}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right] \quad 5$$

$$= \frac{2\pi}{63} \cdot$$

25

---

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛා

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

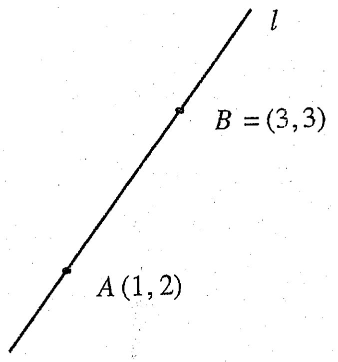
l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මූලමනින්ම පළමුවන

අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(16)



අනුක්‍රමණය $= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. 5

l හි සමීකරණය : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$. 5

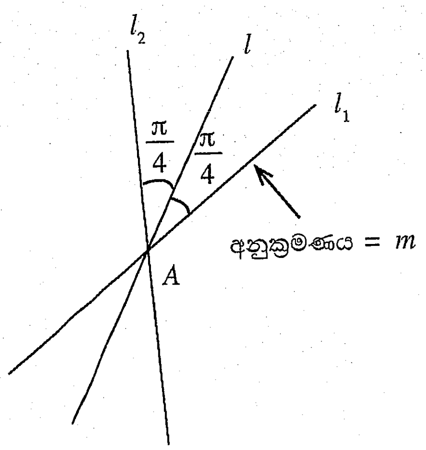
මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ.

10

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad 10$$

$$\therefore \quad 1 = \left|\frac{2m - 1}{2 + m}\right|$$

5



$\Leftrightarrow \quad 2 + m = \pm (2m - 1)$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = 2m - 1$ හෝ $2 + m = -2m + 1$

$\Leftrightarrow \quad m = 3$ හෝ $m = -\frac{1}{3}$.

5 5

$l_1 : y-2 = 3(x-1)$ හා $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$.

$l_1 : 3x - y - 1 = 0$ (5) හා $l_2 : x + 3y - 7 = 0$. (5)

$\boxed{40}$

$l : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). (5)

එවිට, $x = 1+2t,\ y = 2+t,$ මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

$\boxed{10}$

C_1 සඳහා

$P \equiv (1+2t, 2+t)$ සිට l_1 ට ලම්බ දුර C_1 හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\dfrac{|3(1+2t)-(2+t)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$ (10) $= \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. (5)

එනම්, $|3+6t-2-t-1| = 5.$ (5)

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ (5)

$P \equiv (3, 3) = B$ (5), බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ (5) සුදුසු නොවේ.

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{5}{2}$. (5)

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \dfrac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \dfrac{31}{2} = 0$ (5)

$\boxed{45}$

C_2 හි සමීකරණය

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0.$ (15)

කේන්ද්‍රය (5), අරය (5), සමීකරණය (5)

$\boxed{15}$

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27. \quad 5$$

5 5

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}. \quad 5$$

$$\therefore \ 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2 . \quad 5$$

$\therefore$ C_1 හා C_2 ප්‍රලම්භ ඡේදනය නොවේ. 5

30

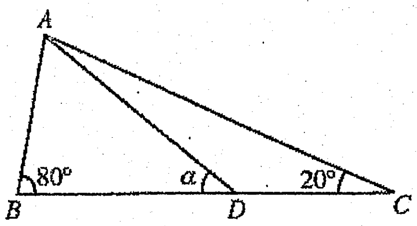
17. (a) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha-20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (a)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$. (10)

$\boxed{10}$

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \sin 90^\circ\cos\theta - \cos 90^\circ\sin\theta$ (5)

$= \cos\theta$. (5)   ($\because \sin 90^\circ = 1$ හා $\cos 90^\circ = 0$.)

$\boxed{10}$

(ii) $2\sin 10^\circ = 2\sin(30^\circ - 20^\circ)$ (5)

$= 2\sin 30^\circ\cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ\sin 20^\circ$ (5)

$= \cos 20^\circ - \sqrt{3}\sin 20^\circ$. (5)   ($\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ හා $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

$\boxed{15}$

(*b*) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$ 5 + 5

10

මෙහි $BC = a, CA = b$ හා $AB = c$.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin 80^\circ}.$$ 10

ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $$\frac{DC}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \frac{AD}{\sin 20^\circ}.$$ 10

$$\therefore \quad \frac{\sin(\alpha - 20^\circ)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

$$\therefore \quad \sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha.$$ 5

25

$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$ 5 5

දැන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ මගින්,

$\cos 10^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin\alpha$ දෙනු ලැබේ. 5 5

$\therefore \sin\alpha\cos 20^\circ - \cos\alpha\sin 20^\circ = 2\sin 10^\circ \sin\alpha.$ 5

$\therefore \tan\alpha(\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ) = \sin 20^\circ$ 5 හා ඒ නයින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}.$ 5

35

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20°}{\sqrt{3}\ \sin 20°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. 5

$\therefore\ \alpha = 30°$. 5 $(20° < \alpha < 90°)$

10

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ 5

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\ \tan\beta}$. 5

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. 5

$\cos^2 x\ (1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ 5

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow$ $\sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow$ $\sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ 5 හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ 5

35

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = 1 \quad 5$$

$$\therefore \ \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \ \sin x \quad 5$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1-\sin^2 x)\ \sin x$$

$$\sin x\,(1-\sin x)\,(2+\sin x) = 0 \quad 5$$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $\quad (\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\ ; n \in \mathbb{Z}$ 5 හෝ $x = m\pi\ ; m \in \mathbb{Z}$. 5

35