අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

(නව/පැරණි නිර්දේශ)

ලකුණු බෙදීයාම

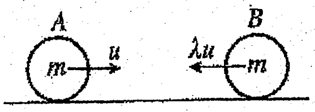
II පත්‍රය

A කොටස :	10×25	$= 250$
B කොටස :	05×150	$= 750$

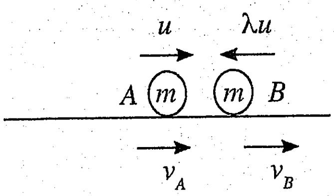
එකතුව $= 1000 / 10$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණ $= 100$

1. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත එකම සරල රේඛාවේ එහෙත් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර A හි හා B හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් u හා λu වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමට මොහොතකට පසු A හි ප්‍රවේගය සොයා $\lambda > \frac{1}{3}$ නම්, A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.



A හා B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$, $\rightarrow$ යෙදීමෙන් :



$$(mv_A + mv_B) - (mu - m\lambda u) = 0.$$

$$\therefore v_A + v_B = (1 - \lambda)u \text{ ——— } (1) \quad (10)$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන් :

$$v_B - v_A = \frac{1}{2}(u + \lambda u) \text{ ——— } (2) \quad (5)$$

$$(1) - (2) : \quad 2v_A = u - \lambda u - \frac{1}{2}u - \frac{\lambda}{2}u$$

$$v_A = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda)u \quad (5)$$

$\lambda > \frac{1}{3}$, නම් එවිට $v_A < 0$. (5)

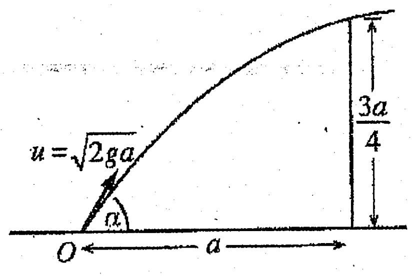
$\therefore$ A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.

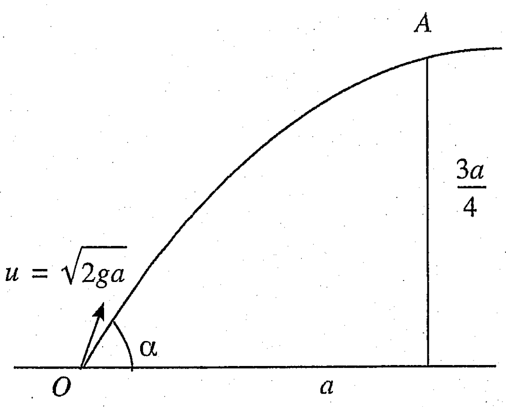
$\boxed{25}$

2. අංශුවක් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $u=\sqrt{2ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස $\frac{3a}{4}$ වූ සිරස් බිත්තියකට යාන්තමින් ඉහළින් යයි.

$\sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.





O සිට A දක්වා ගතවූ කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad a = u\cos\alpha\, t$ —— (1) 5

$\uparrow \quad \frac{3a}{4} = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ —— (2) 5

(1) $\Rightarrow t = \frac{a}{u\cos\alpha}$

දැන්, (2) $\Rightarrow \frac{3a}{4} = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{2ga\cos^2\alpha}$ 5

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \tan\alpha - \frac{1}{4}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow \sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ 5

$\Rightarrow (1+\tan^2\alpha) - 4\tan\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\alpha - 4\tan\alpha + 4 = 0$

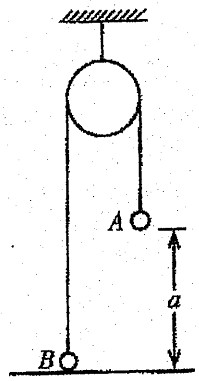
$\Rightarrow (\tan\alpha - 2)^2 = 0$

$\therefore \tan\alpha = 2$ 5

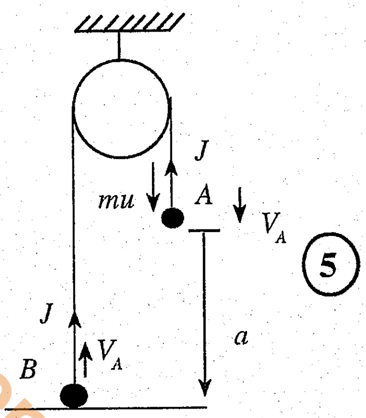
$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2)$.

25

3. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි A අංශුව තිරස් ගෙබිමක සිට a උසකින් ඇතිවද B අංශුව ගෙබිම ස්පර්ශ කරමින් ද සමතුලිතතාවයේ පිහිටා ඇත. දැන්, A අංශුවට සිරස්ව පහළට mu ආවේගයක් දෙනු ලැබේ. ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු A අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
A ට ගෙබිම වෙත ළඟා වීමට ගතවන කාලය ලියා දක්වන්න.



$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,



$A \downarrow \quad mu - J = mV_A$ 5

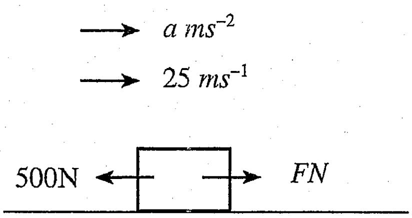
$B \uparrow \quad J = mV_A$ 5

$\therefore \quad V_A = \frac{u}{2}$ 5

$T = \frac{a}{V_A} = \frac{2a}{u}$ 5

25

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක්, විශාලත්වය 500 N වූ නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වේ. කාරයේ එන්ජිම 50 kW ජවයකින් ක්‍රියාකරමින් කාරය 25 m s^{-1} වේගයෙන් ධාවනය වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න.
මෙම මොහොතේ දී කාරයේ එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කරනු ලැබේ. එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කළ මොහොතේ සිට තත්පර 50 කට පසු කාරයේ වේගය සොයන්න.



ජවය = 50kW නිසා,

$50 \times 10^3 = F \times 25$ 5

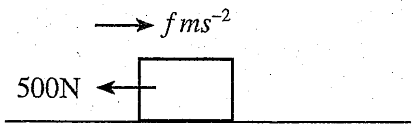
$\therefore F = 2000$

$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$F - 500 = 1500\,a.$ 5

$\therefore a = 1$ 5

කාරයේ එන්ජිම නැවතුණු විට,



$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$

$-500 = 1500\,f$ 5

$\therefore f = -\frac{1}{3}$

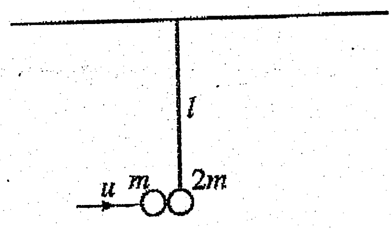
$v = u + at \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

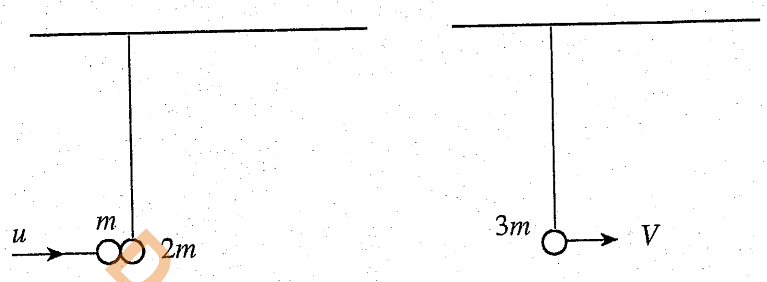
$v = 25 - \frac{1}{3} \times 50$

$v = \frac{25}{3}\ ms^{-1}$ 5

$\boxed{25}$

5. දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් තිරස් සිවිලිමක නිදහසේ එල්ලා ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවයේ පවතී. u ප්‍රවේගයෙන් තිරස් දිශාවකින් චලනය වන ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක්, P අංශුව සමග ගැටී එයට හා වේ. ගැටුමට පසුව ද තන්තුව තදව පවතින අතර සංයුක්ත අංශුව සිවිලිමට යාන්තමින් ළඟා වේ. $u = \sqrt{18gl}$ බව පෙන්වන්න.





$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන් : m හා $2m$ $\longrightarrow$

$0 = 3mV - mu$ 5

$\therefore V = \dfrac{u}{3}$ 5

සංයුක්ත අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$\dfrac{1}{2}(3m)V^2 - 3mgl = 0.$ 10

$\therefore V^2 = 2gl$

$\therefore \dfrac{u^2}{9} = 2gl$

ඒ නයින්, $u = \sqrt{18gl}$ 5

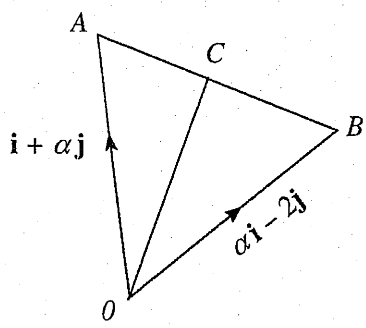
25

6. $\alpha > 0$ හා සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අවල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ හා $\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. AB ට OC ලම්බ යැයි දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \quad 5$$

$$= (\alpha - 1)\,\mathbf{i} - (\alpha + 2)\,\mathbf{j}$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad 5$$

$$= (\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + \frac{1}{3}[(\alpha - 1)\,\mathbf{i} - (\alpha + 2)\,\mathbf{j}] \quad 5$$

$$= \frac{1}{3}[(\alpha + 2)\,\mathbf{i} + 2(\alpha - 1)\,\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) - 2(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

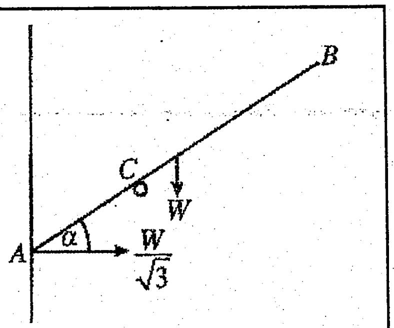
$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0$$

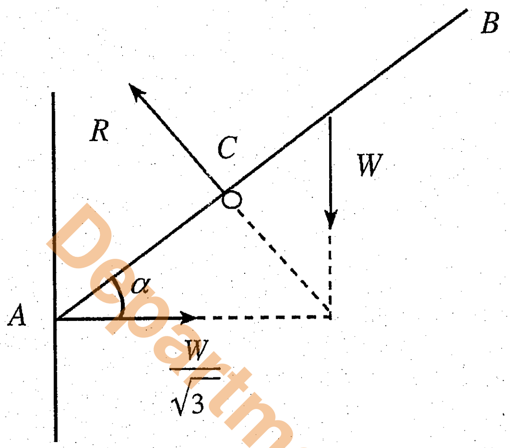
$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad 5 \qquad (\because \alpha > 0)$$

$\boxed{25}$

7. දිග $2a$ හා බර W වූ ACB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහි ව C හි තබා ඇති සුමට නාදැත්තක් මගින් සමතුලිතතාවේ තබා ඇත. A හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇත. දණ්ඩ තිරස සමග සාදන α කෝණය $\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$AC = \frac{3}{4}a$ බව ද පෙන්වන්න.





දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සඳහා

$$\rightarrow \quad R \sin\alpha = \frac{W}{\sqrt{3}} \quad \text{———} \quad (1) \qquad 5$$

$$\uparrow \quad R \cos\alpha = W \quad \text{———} \quad (2) \qquad 5$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \qquad 5$$

දැන්, $(1) \Rightarrow R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad R \times AC = W \times a\cos\frac{\pi}{6} \quad (\text{හෝ } Wa\cos\alpha) \qquad 5$$

$$\frac{2W}{\sqrt{3}} \times AC = W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = \frac{3}{4}a \qquad 5$$

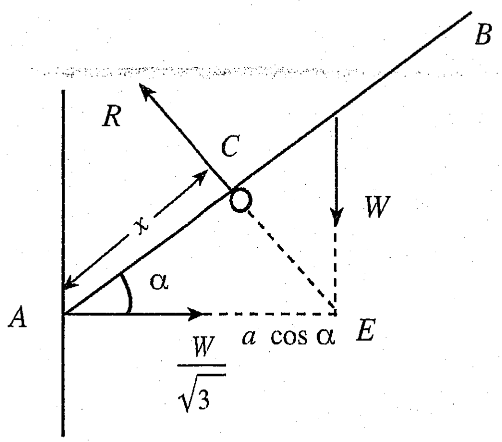
25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$\overset{AB}{\nearrow}$ $\quad \dfrac{W}{\sqrt{3}} \cos\alpha = W \sin\alpha \quad$ (10)

$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6} \quad$ (5)



$\overset{\curvearrowright}{C} \quad \dfrac{W}{\sqrt{3}} \times x \sin\dfrac{\pi}{6} = W \times (a-x)\cos\dfrac{\pi}{6} \quad$ (5) $\quad$ හෝ $\; x = AE\cos\alpha$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times x \times \dfrac{1}{2} = (a-x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 3(a-x)$

$x = \dfrac{3}{4}a \quad$ (5)

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

ADE බල ත්‍රිකෝණයක් වේ. (5)

$\dfrac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{AE} = \dfrac{W}{AD}$

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad$ (5)

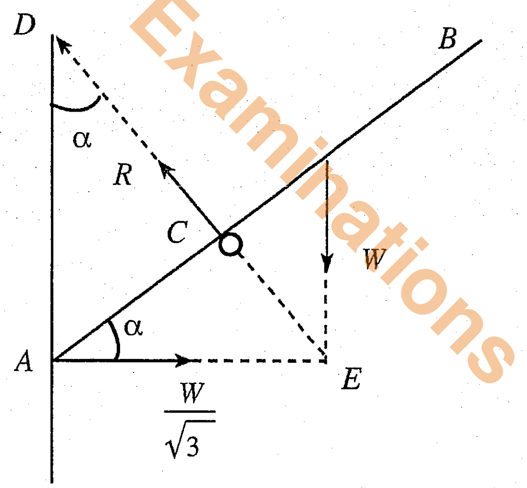
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} \quad$ (5)

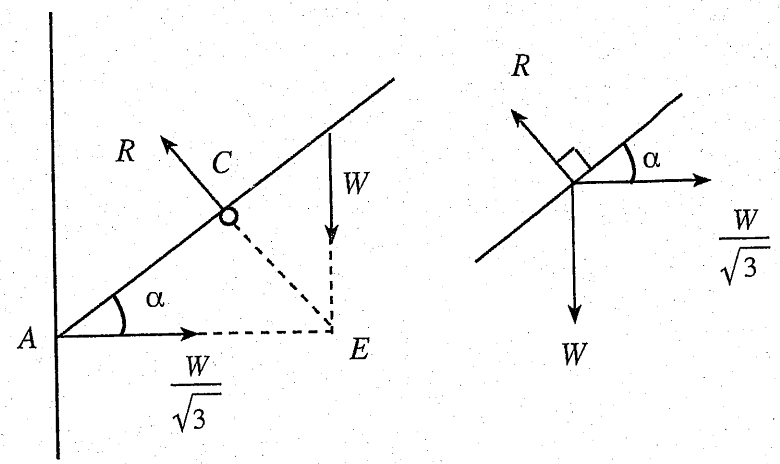
$\therefore AE = a\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \quad$ (5)

$AC = AE\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{3}{4}a \quad$ (5)



වෙනත් ක්‍රමයක් 3



ලාමී නියමයෙන්,

$$\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{\sin(\pi - \alpha)} \quad 5$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \quad 5$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

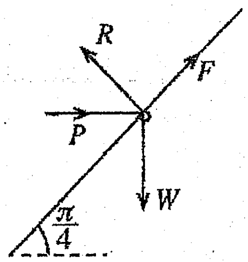
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad 5$$

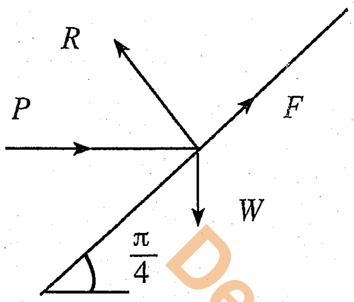
$AC = AE\cos\alpha$ මගින් $AC = \frac{3}{4}a$ ලැබේ. 5 + 5

6

8. බර W වූ කුඩා පබළුවක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත අචල, රළු, සෘජු කම්බියකට අමුණා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගින් පබළුව සමතුලිතව තබා ඇත. පබළුව හා කම්බිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. පබළුව මත ඝර්ෂණ බලය F හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ P හා W ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$\frac{F}{R} = \frac{W-P}{W+P}$ බව දී ඇත. $\frac{W}{3} \le P \le 3W$ බව පෙන්වන්න.





$$F = \frac{W-P}{W+P}$$

පබලුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

$\nearrow$ $F - \frac{W}{\sqrt{2}} + \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ 5 ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

$\nwarrow$ $R - \frac{W}{\sqrt{2}} - \frac{P}{\sqrt{2}} = 0.$ 5 ($\cos\frac{\pi}{4}$ හෝ $\sin\frac{\pi}{4}$ සමග)

$$\mu \ge \frac{|F|}{R}$$

$\frac{1}{2} \ge \frac{|W-P|}{W+P}$ 10

සංඛ්‍යාත්මක අගය නොමැති 5 පමණි.

$$\therefore\ |W-P| \le \frac{1}{2}(W+P)$$

$$\therefore\ -\frac{1}{2}(W+P) \le W-P \le \frac{1}{2}(W+P)$$

ඒ නයින්, $\frac{W}{3} \le P \le 3W$ 5

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{4}$ හා $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයන්න.

A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත **නොවන** බව පෙන්වන්න.

$$P(B\mid A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad 5$$

දැන්, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ මගින් 5

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{20}$$ ලැබේ.

$$\therefore P(B) = \frac{16}{20} - \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20} \quad 5$$

එවිට $P(A)\,.\,P(B) = \frac{3}{5}\times\frac{7}{20} = \frac{21}{100}$ 5

$$\therefore \quad P(A\cap B) \neq P(A)\,.\,P(B) \quad 5$$

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත නොවේ.

$\boxed{25}$

10. එක එකක් 10 ට අඩු හෝ සමාන ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ 5 ක කුලකයක මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය යන එක එකක් 6 ට සමාන වේ. නිරීක්ෂණවල පරාසය 9 වේ. මෙම නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

මාතය $= 6 \Rightarrow$ 6, 6 සංඛ්‍යාවලින් අවම වශයෙන් දෙකක් වේ. 5

පරාසය $= 9$ හා සංඛ්‍යා ධන නිඛිල ≤ 10 වේ. කුඩාම සංඛ්‍යාව 1 හා විශාලම සංඛ්‍යාව 10 වේ. 5

මධ්‍යස්ථය 6 වන නිසා, සංඛ්‍යා

$1, a, 6, 6, 10$ හෝ
$1, 6, 6, a, 10.$ විය යුතුය. 5

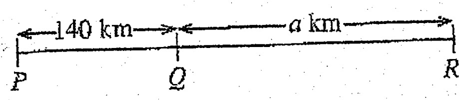
මධ්‍යන්‍යය $= \dfrac{a+23}{5} = 6$ ලබා දෙයි. 5

$\therefore \ a = 7$ 5

$\therefore$ සංඛ්‍යා 1, 6, 6, 7, 10 වේ.

$\boxed{25}$

11. (*a*) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි P, Q හා R දුම්රිය ස්ථාන තුනක් $PQ = 140$ km හා $QR = a$ km වන පරිදි සරල රේඛාවක පිහිටා ඇත. කාලය $t = 0$ දී A දුම්රියක් P හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට f km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් පැය භාගයක් ගමන් කර කාලය $t = \frac{1}{2}$ h හි දී එයට තිබූ ප්‍රවේගය පැය තුනක කාලයක් පවත්වාගෙන යයි. ඉන්පසු එය f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. කාලය $t = 1$ h හි දී තවත් B දුම්රියක් R හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට පැය T කාලයක් $2f$ km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් ද ඉන්පසු f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ද ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. දුම්රිය දෙක ම එක ම මොහොතේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණේ. එක ම රූපසටහනක A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.



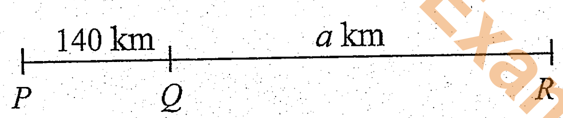
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $f = 80$ බව පෙන්වා, T හි හා a හි අගයන් සොයන්න.

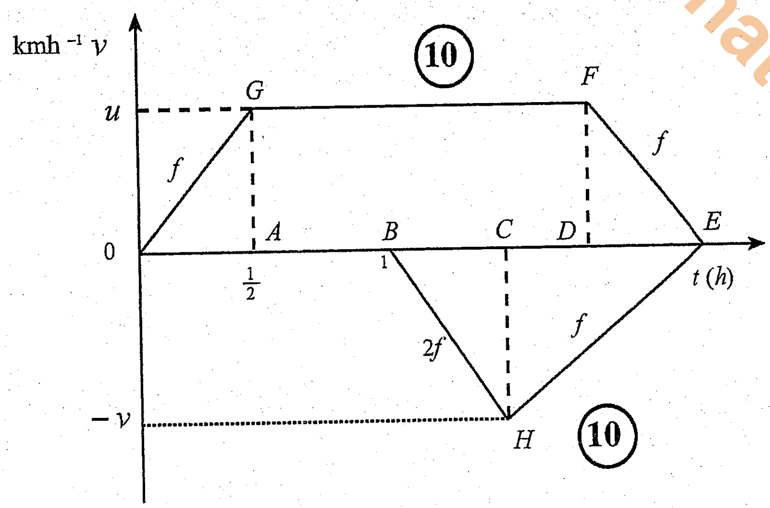
(*b*) නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u ඒකාකාර වේගයෙන් බටහිර දෙසට යාත්‍රා කරන අතර බෝට්ටුවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{u}{2}$ ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී, බෝට්ටුවෙන් d දුරකින් උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{3}$ ක කෝණයකින් නැව පිහිටයි.

(i) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් බටහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් බෝට්ටුවට නැව අල්ලාගත හැකි බව පෙන්වා, එයට නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\frac{2d}{\sqrt{3}u}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{\sqrt{7}u}{2}$ බව පෙන්වා, නැව සහ බෝට්ටුව අතර කෙටීම දුර $\frac{d}{2\sqrt{7}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*)





20

$\underline{\Delta\, OAG}$

$$f = \frac{u}{\frac{1}{2}}$$

$\therefore \quad f = 2u$ 5

$\Delta\, OAG \equiv \Delta\, DEF$

$\therefore\, DE = \frac{1}{2}$ 5

$OEFG$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $= 140$ 5

$\frac{1}{2}\,(4 + 3)\,u = 140$ 5

$\therefore \quad u = 40$

$\therefore\, f = 80.$ 5

25

$\underline{\Delta\, BHC}$

$2f = \frac{V}{T} \Rightarrow 160 = \frac{V}{T}$ 5

$\underline{\Delta\, ECH}$

$f = \frac{V}{CE} \Rightarrow 80 = \frac{V}{CE}$ 5

$\therefore\, CE = 2T$ 5

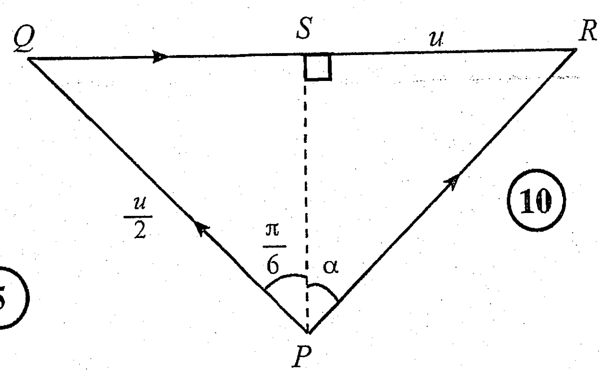
$\therefore \quad 3T = 3$ හා $T = 1.$ 5 තවද $V = 160.$

$a = BHE$ ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 3 \times 160$

$= 240$ 5

25

(b) $\mathbf{V}(S, E) = \leftarrow u$ 5



(i) $\mathbf{V}(B, E) = \frac{u}{2}$ $\frac{\pi}{6}$ 5

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$ 5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$

$QS = \frac{u}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{u}{4}$

$\therefore\ SR = \frac{3u}{4}$

$SP = \frac{u}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}u}{4}$

$\tan\alpha = \frac{SR}{SP} = \frac{3u}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}u} = \sqrt{3}$ 5 + 5

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$ 5

∴ බෝට්ටුවට නැව අල්ලා ගත හැකිය.

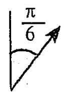
$\boxed{40}$

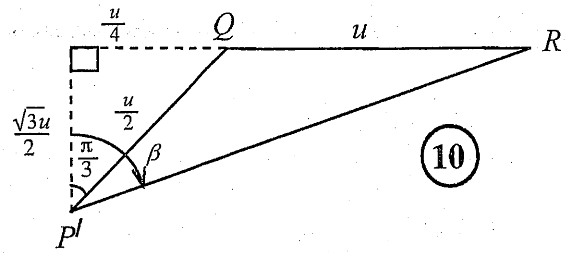
$Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ PR = \frac{\sqrt{3}\,u}{2}$ 5

$t = \frac{d}{PR} = \frac{2d}{\sqrt{3}\,u}$ 5

$\boxed{10}$

(ii) $\mathbf{V}(B, E) = $  (5)

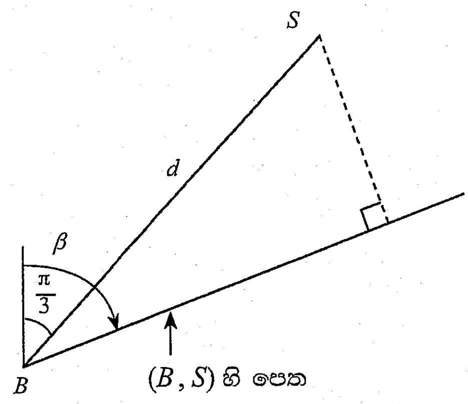


(10)

$$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$$

$$= \overrightarrow{P^lQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$= \overrightarrow{P^lR}$$



ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයෙන්,

$\sin\beta = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ හා $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ වේ.

කෙටිම දුර $= d\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$ (5)

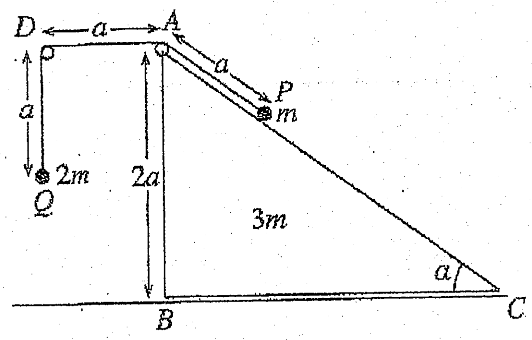
$= d\left(\sin\beta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\beta\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (5)

$= d\left(\frac{5}{4\sqrt{7}} - \frac{3}{4\sqrt{7}}\right)$

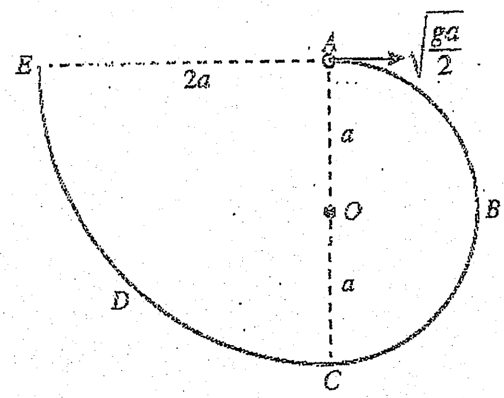
$= \frac{d}{2\sqrt{7}}.$ (5)

$\boxed{30}$

12. (a) රූපයෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, $A\hat{C}B=\alpha$, $A\hat{B}C=\frac{\pi}{2}$ හා $AB=2a$ වූ BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AC රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හා D හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන දිග $3a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙක ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AC මත අල්වා තබා $AP=AD=DQ=a$ වන පරිදි Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව ගෙබිමට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස O කේන්ද්‍රය හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් වන අතර CDE කොටස කේන්ද්‍රය A හා අරය $2a$ වූ වෘත්තයකින් හතරෙන් කොටසකි. A හා C ලක්ෂ්‍ය O හරහා යන සිරස් රේඛාවේ පිහිටන අතර, AE රේඛාව තිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබළුවක් A හි තබා තිරස්ව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි.

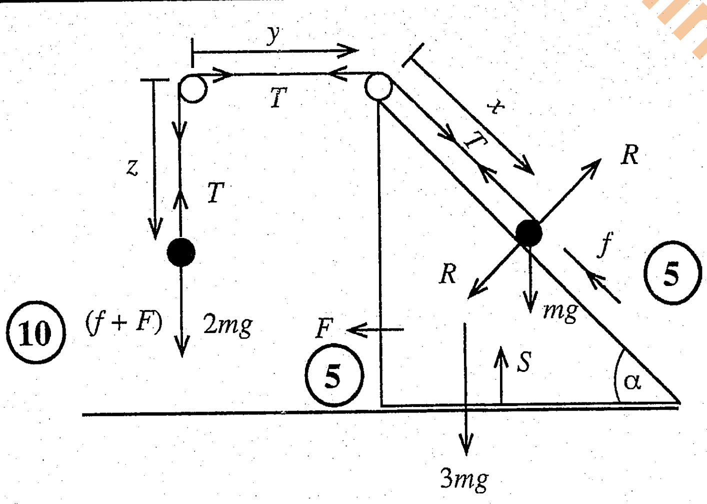


$\overrightarrow{OA}$ සමඟ θ $(0\leq\theta\leq\pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P පබළුවේ v වේගය, $v^2=\frac{ga}{2}(5-4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඉහත පිහිටීමේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, P පබළුව $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ වූ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට එය එහි දිශාව වෙනස් කරන බව පෙන්වන්න.

P පබළුව E හි දී කම්බියෙන් ඉවත් වීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය ලියා දක්වා එම මොහොතේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(a)



බල 15

$$x+y+z = \text{නියතයකි.}$$

$$\ddot{z} = -\ddot{x}-\ddot{y}$$

$$= f+F$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

(2m) $\downarrow$ සඳහා $2mg - T = 2m(f + F)$ (10)

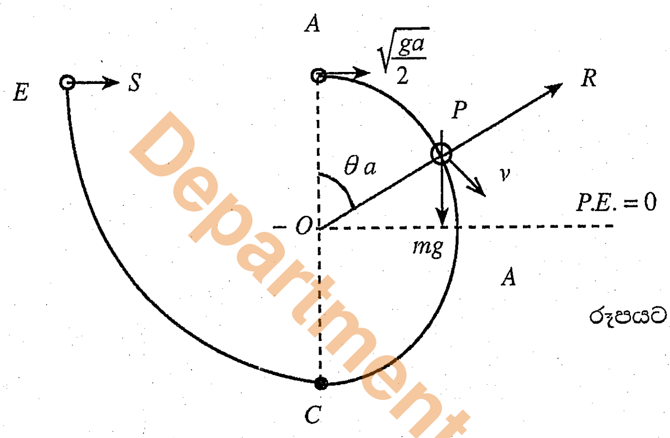
(m) $\nwarrow$ සඳහා $T - mg\sin\alpha = m(f + F\cos\alpha)$ (10)

(m) හා (3m) $\leftarrow$ සඳහා $T = 3mF + m(F + f\cos\alpha)$ (15)

(2m) $\downarrow$ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{1}{2}(f + F)t^2$, මෙහි t යනු ගන්නා කාලය වේ. (10) **80**

(b)



රූපයට (10)

P.E. + K.E. + සමීකරණය
(5) (5) (5)

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මමයය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{2}\right) + mga.$$

$$\therefore 2v^2 + 4ga\cos\theta = 5ga$$

$$\therefore v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

30

වෘත්ත චලිතය සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීමෙන්

$$R - mg\cos\theta = -m\frac{V^2}{a} \quad (10)$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{mg}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

$$= \frac{mg}{2}(6\cos\theta - 5)$$

$0 < \theta < \alpha$; $R > 0$ හා $\alpha < \theta < \pi$; $R < 0$ මෙහි $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ (5)

ඒ නයින්, පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට ප්‍රතික්‍රියාව එහි දිශාව වෙනස් කර ගනියි. **20**

E හිදී ප්‍රවේගය w ලෙස ගනිමු.

A සිට E දක්වා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්, $w = \sqrt{\frac{ga}{2}} \uparrow$. (10)

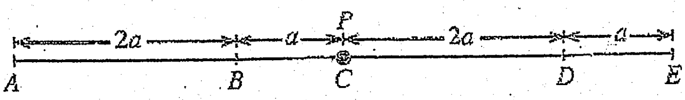
$\underline{F} = m\underline{a}$ $\longrightarrow$ යෙදීමෙන්, (5)

$$S = \frac{mw^2}{2a} = \frac{m\left(\sqrt{\frac{ga}{2}}\right)^2}{2a} = \frac{mg}{4}. \quad (5)$$

20

---

13. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $AB = 2a, BC = a$, $CD = 2a$ හා $DE = a$ වන පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත A, B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් සරල රේඛාවක් මත පිහිටා ඇත.



ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය kmg වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් A ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වන තවත් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් E ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර P අංශුවට ඈඳා ඇත.

P අංශුව C හි අල්වා තබා මුදා හළ විට, එය සමතුලිතතාවේ පවතී. k හි අගය සොයන්න.

දැන්, P අංශුව D ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන තෙක් AP තන්තුව ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. D සිට B දක්වා P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\frac{3g}{a}x=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $CP = x$ වේ.

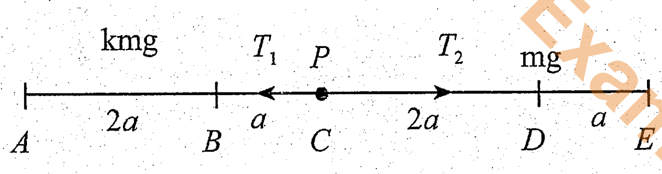
$\dot{x}^2 = \frac{3g}{a}(c^2-x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P අංශුව B ට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු විස්තාරය වේ.

P අංශුව B වෙත ළඟා වන විට එයට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\sqrt{ag}$ වන පරිදි ය.

B පසු කිරීමෙන් පසු ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වන තෙක් P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{y}+\frac{g}{a}y=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $DP = y$ වේ.

D වලින් පටන් ගත් P අංශුව දෙවන වතාවට B වෙත පැමිණීමට ගන්නා මුළු කාලය $2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

13.



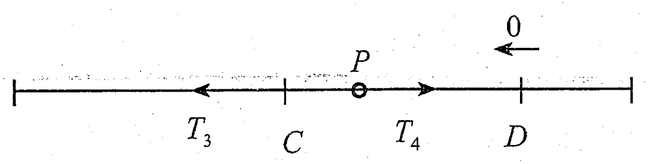
C හිදී P සමතුලිතතාවයේ පවතී.

$\therefore\ T_1 - T_2 = 0$ (5)

$\therefore\ kmg \cdot \frac{a}{2a} = mg \cdot \frac{2a}{a}$ (10)

$\therefore\ k = 4$ (5)

$\boxed{20}$



$\longrightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ (P) සඳහා :

$$-T_3 + T_4 = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad -4mg.\frac{(a+x)}{2a} + mg.\frac{(2a-x)}{a} = m\ddot{x} \quad 10$$

5 5

එවිට, $\frac{g}{a}\left\{-2a-2x+2a-x\right\} = \ddot{x}$.

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{-3g}{a}x \quad 5$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{3g}{a}x = 0$$

මෙය $-a \le x \le 2a$ සඳහා වලංගු වේ.

$\boxed{25}$

මෙම ස. අ. ච. සඳහා කේන්ද්‍රය C ද $x = 2a$ වන විට $\dot{x} = 0$ වේ.

5

$\therefore$ මෙම ස. අ. ච. හි විස්තාරය $2a$ වේ. 5

$$\therefore \quad \dot{x}^2 = \frac{3g}{a}(4a^2 - x^2) \quad 5$$

$B\ (x = -a)$ හි දී ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

එවිට $v^2 = \frac{3g}{a}(4a^2 - a^2)$ 5

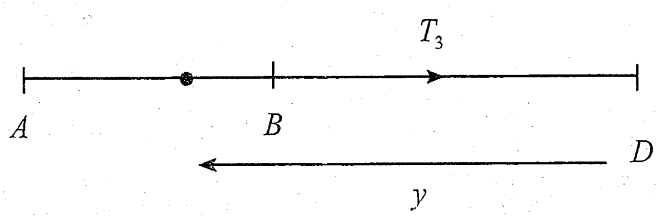
$= 9ga$

$v = 3\sqrt{ga}$ 5

$\therefore P$ අංශුව පළමුවරට B ට ළඟාවන විට ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga} \longleftarrow$ වේ.

$\boxed{25}$

ආවේගය නිසා, ආවේගයට මොහොතකට පසු ප්‍රවේගය $\sqrt{ga}$ වේ.



$-T_3 = m\ddot{y}$ 5

$-mg\dfrac{y}{a} = m\ddot{y}$ 5

$\therefore \ \ddot{y} = -\dfrac{g}{a}y$

හෝ $\ddot{y} + \dfrac{g}{a}y = 0$ 5

$\boxed{15}$

මෙම ස. අ. ච. හි කේන්ද්‍රය D වේ. 5

විස්තාරය c යැයි ගනිමු.

එවිට, $\dot{y}^2 = \dfrac{g}{a}(c^2 - y^2)$

$y = 3a$ වන විට $\dot{y} = \sqrt{ga}$ 5

$ga = \dfrac{g}{a}(c^2 - 9a^2)$. 5

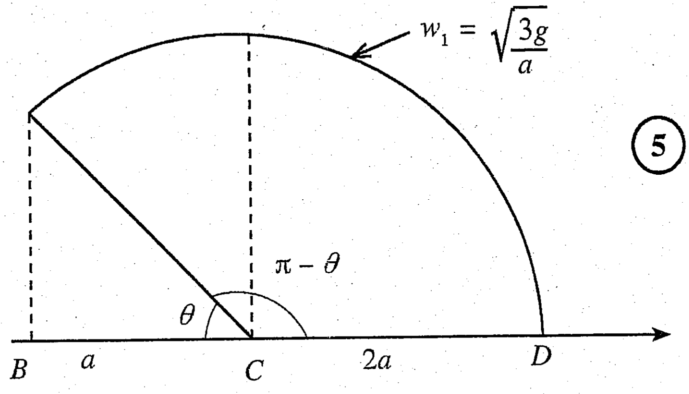
$\therefore \ c^2 = 10a^2$

$\therefore \ c = \sqrt{10}\,a$ 5

$3a < \underbrace{\sqrt{10}\,a}_{c} < 5a$ නිසා, P අංශුව B හා A අතර F ලක්ෂ්‍යයකදී ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වේ.

$\boxed{20}$

D සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_1 යැයි ගනිමු.



5

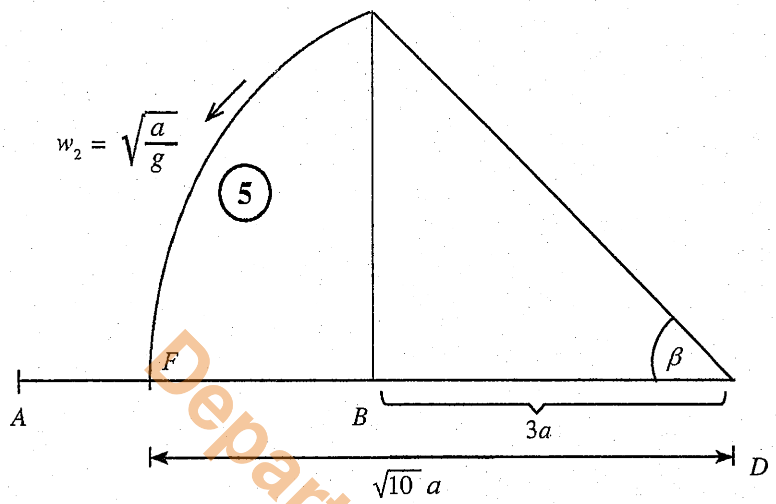
$\sqrt{\dfrac{3g}{a}}\,\tau_1 = \pi - \theta,$ මෙහි $\cos\theta = \dfrac{a}{2a}$

5

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 5

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{g}{3g}} \times \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad 5$$



B සිට F ට ගන්නා ලද කාලය τ_2 යැයි ගනිමු.

$\sqrt{\frac{g}{a}}\,\tau_2 = \beta$ 5 හා $\cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}\,a}$

$\therefore \tau_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ 5 $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

F සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_3 යැයි ගනිමු. (දෙවන වතාවට B ට පැමිණීම.)

$\tau_3 = \tau_2$

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= \tau_1 + 2\tau_2$ 5

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\} \quad 5$$

45

---

14. (*a*) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු.

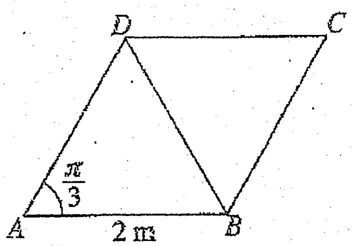
O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $12\mathbf{a}$, $18\mathbf{b}$ හා $10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ වේ.

$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

A, B හා C ඒක රේඛීය බව අපෝහනය කර, $AC : CB$ සොයන්න.

$OC = \sqrt{139}$ බව දී ඇත. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $ABCD$ යනු $AB = 2$ m හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වූ රොම්බසයකි. විශාලත්වය 10 N, 2 N, 6 N, P N හා Q N වූ බල පිළිවෙළින් AD, BA, BD, DC හා CB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය 10 N ද එහි දිශාව BC ට සමාන්තර B සිට C අතට වූ දිශාව බව ද දී ඇත. P හා Q හි අගයන් සොයන්න.



සම්ප්‍රයුක්ත බලයෙහි ක්‍රියා රේඛාව, දික් කරන ලද BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර ද සොයන්න.

දැන්, සම්ප්‍රයුක්ත බලය A හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන පරිදි වාමාවර්ත අතට ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය M Nm වූ යුග්මයක් ද CB හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරන එක එකෙහි විශාලත්වය F N වූ බල දෙකක් ද පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. F හා M හි අගයන් සොයන්න.

(*a*)
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad 5$$
$$= 10\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 12\mathbf{a}$$
$$= -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \quad 5$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \quad 5$$
$$= 18\mathbf{b} - (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = -10\mathbf{a} + 15\mathbf{b} \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{AC} \quad 5$$

$\therefore$ A, B හා C ඒක රේඛීය වන අතර, 5

$AC : CB = 1 : 5$ 5

$\boxed{15}$

$OC = \sqrt{139} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 139$ 5

$(10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 139$ 5

$100\,|\mathbf{a}|^2 + 60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9\,|\mathbf{b}|^2 = 139$ 5

$60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 30$

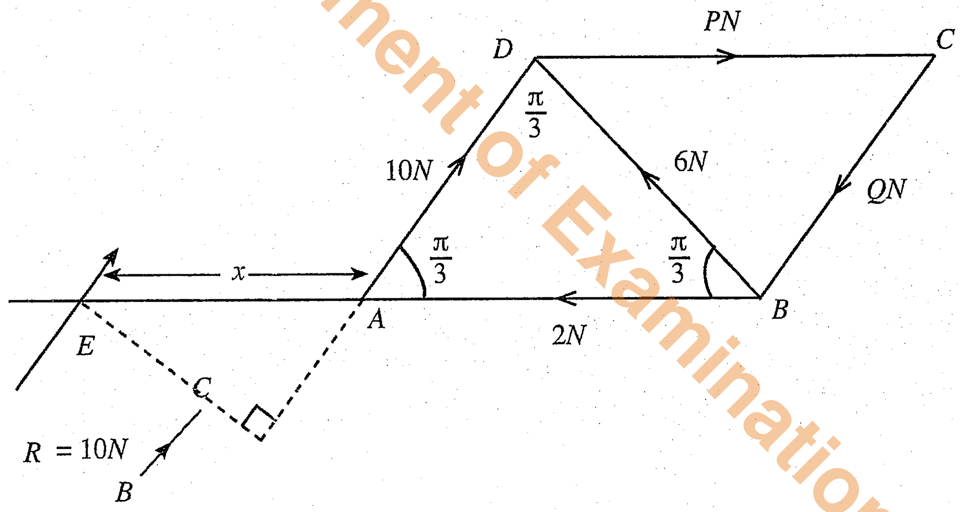
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$ 5

$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos A\hat{O}B = \frac{1}{2}$ 5

$\therefore A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ 5

30

(b)



10

$\uparrow \quad 10 \sin \frac{\pi}{3} = 10 \sin \frac{\pi}{3} - Q \sin \frac{\pi}{3} - 6 \sin \frac{\pi}{3}$ 10

$\therefore Q = 6$ 5

$\rightarrow \quad 10 \cos \frac{\pi}{3} = P - 2 - 6 \cos \frac{\pi}{3} - 6 \cos \frac{\pi}{3} + 10 \cos \frac{\pi}{3}$ 10

$\therefore P = 8$ 5

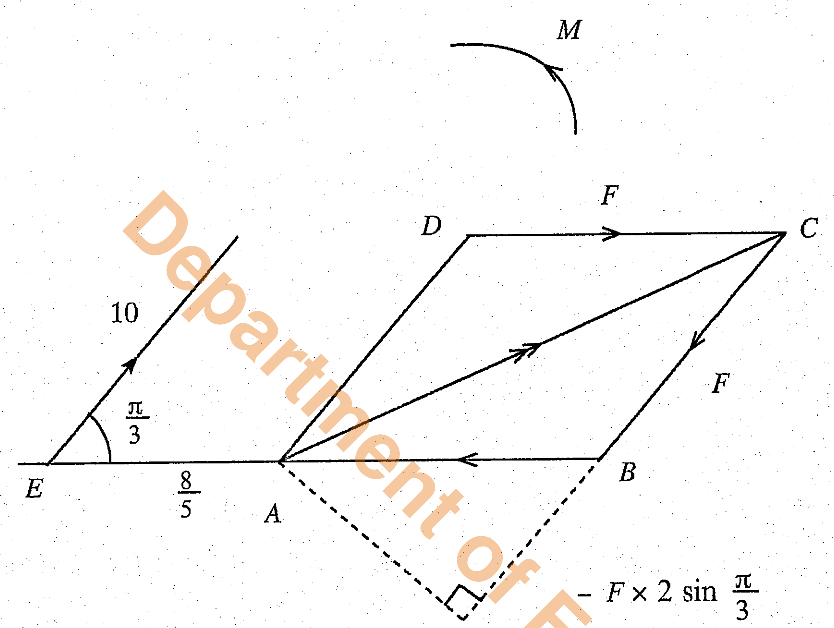
40

$E \curvearrowright \quad 10x \sin\frac{\pi}{3} - 6x\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} - 8x2\sin\frac{\pi}{3} + 6\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ 10

$\therefore\ 10x\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\therefore\ x = \frac{8}{5}$ m 5

$\boxed{15}$



$A \curvearrowleft \quad -10 \times \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{3} + M - F \times 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$ 10

$M = F \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ 5

$C \curvearrowleft \quad M - 10\left(2+\frac{8}{5}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ 5

$M = 10 \times \frac{18}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

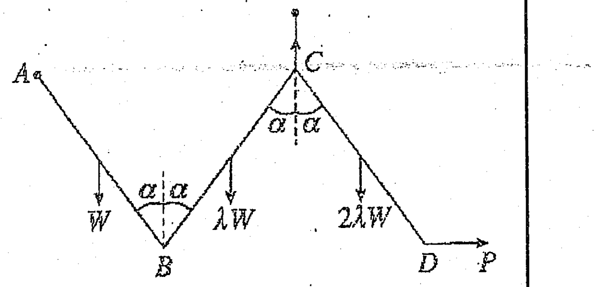
$= 18\sqrt{3}$ 5

$F = \dfrac{18\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$ 5

$\boxed{30}$

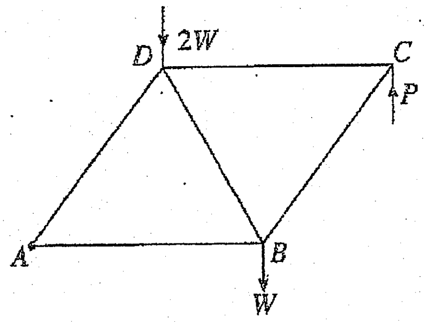
---

15. (a) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB, BC හා CD දඬුවල බර පිළිවෙළින් $W, \lambda W$ හා $2\lambda W$ වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හා C එකම තිරස් මට්ටමේ ද දඬු එක එකක් සිරස සමග α කෝණයක් සාදන පරිදි ද C සන්ධියට හා C ට සිරස්ව ඉහළින් වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා D අන්තයට යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



B හි දී CB මගින් AB මත ඇති කරන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\frac{W}{3}\tan\alpha$ හා $\frac{W}{6}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත්තේ A, B, C හා D හි දී නිදහසේ සන්ධි කරන ලද එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු මගිනි. B හා D හි දී පිළිවෙළින් W හා $2W$ වන භාර ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර AB තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ C හි දී සිරස්ව ඉහළට යොදන ලද P බලයක් මගිනි. W ඇසුරෙන් P හි අගය සොයන්න.

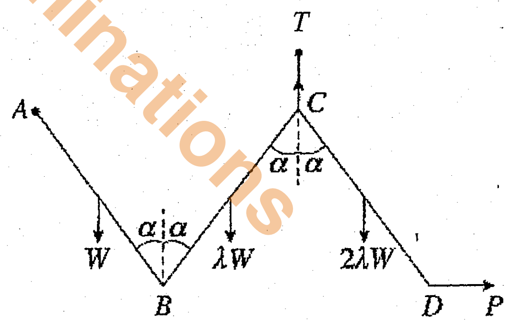


බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් ඒවා සොයන්න.

(a) CD සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$C \curvearrowright \quad 2\lambda Wa \sin\alpha - P\, 2a\cos\alpha = 0 \quad 5$$

$$\therefore P = \lambda W \tan\alpha \quad 5$$



BC හා CD සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$B \curvearrowright \quad \lambda Wa \sin\alpha - T\, 2a\sin\alpha + 2\lambda W\, 3a \sin\alpha = 0 \quad 10$$

$$\therefore T = \frac{7}{2}\lambda W \quad 5$$

AB, BC හා CD සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

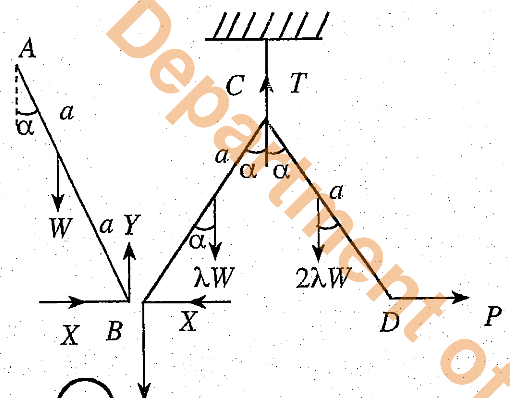
$\overset{\curvearrowright}{A}$ $\quad Wa \sin\alpha + \lambda W\, 3a \sin\alpha - T\, 4a \sin\alpha + 2\lambda W\, 5a \sin\alpha - P\, 2a \cos\alpha = 0$ 10

$W\sin\alpha + 13\lambda W \sin\alpha - 14\lambda W \sin\alpha - \lambda W \tan\alpha\ 2\cos\alpha = 0$ 5

$1 - \lambda - 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ 5

$\boxed{45}$



5

BC හා CD සඳහා

$\uparrow \quad Y + 3\lambda W - T = 0$

$\therefore Y = \frac{7}{2}\lambda W - 3\lambda W$ 5

$= \frac{\lambda W}{2}$

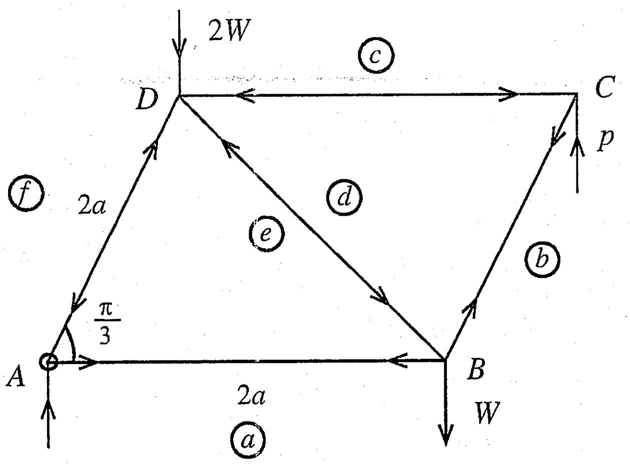
$= \frac{W}{6}$

$\leftarrow \quad X - P = 0$

$\therefore X = \frac{1}{3} W \tan\alpha$ 5

$\boxed{15}$

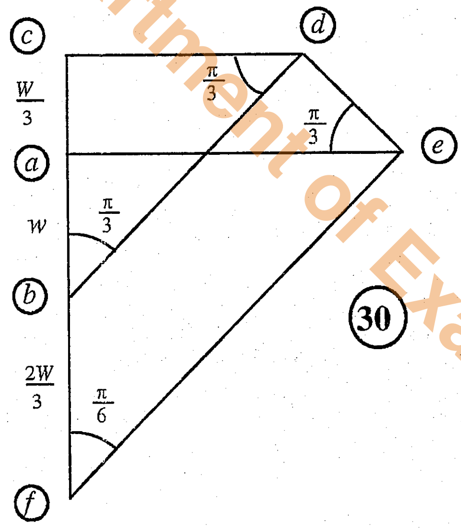
(b)



$$A \curvearrowright \quad 2Wa + W\,2a - P\,3a = 0$$

$$\therefore P = \frac{4W}{3} \quad (10)$$

10



(එක් එක් සන්ධිය සඳහා 10)

(30)

30

දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB	$\frac{5\sqrt{3}\,W}{9}$	–
BC	$\frac{8\sqrt{3}\,W}{9}$	–
CD	–	$\frac{4\sqrt{3}\,W}{9}$
DA	–	$\frac{10\sqrt{3}\,W}{9}$
BD	–	$\frac{2\sqrt{3}\,W}{9}$

(5) + (5)

(5) + (5)

(5) + (5)

(5) + (5)

(5) + (5)

50

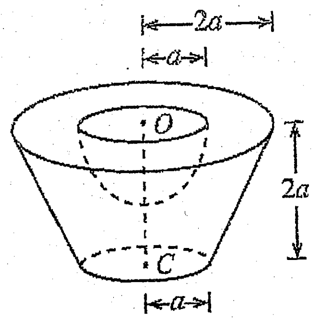
16. (i) පතුලේ අරය r හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}$ දුරකින් ද

(ii) අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3r}{8}$ දුරකින් ද

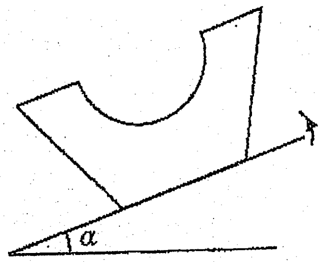
පිහිටන බව පෙන්වන්න.

පතුලේ අරය $2a$ හා උස $4a$ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක ඡින්නකයකින් ඝන අර්ධ ගෝලයක් ඉවත් කර සාදා ඇති S වංගෙඩියක් යාබද රූපයේ දැක්වේ. ඡින්නකයේ ඉහළ වෘත්තාකාර මුහුණතේ අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් $2a$ හා O වන අතර පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත සඳහා ඒවා පිළිවෙළින් a හා C වේ. ඡින්නකයේ උස $2a$ වේ. ඉවත් කළ ඝන අර්ධ ගෝලයෙහි අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් a හා O වේ.

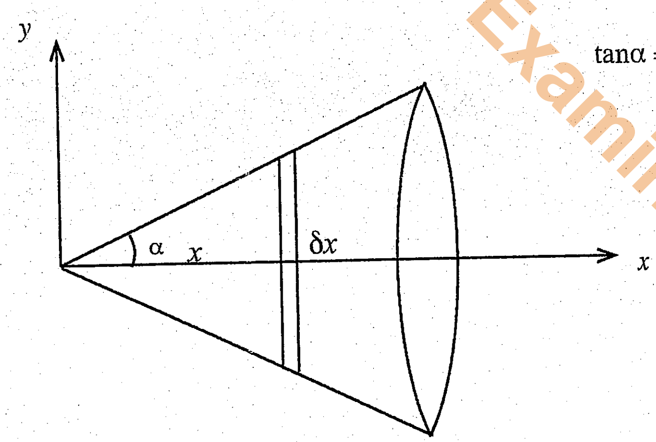
S වංගෙඩියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{41}{48}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



S වංගෙඩිය, එහි පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත, තලය ස්පර්ශ කරමින් රළු තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ. වංගෙඩිය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය 0.9 වේ. $\alpha < \tan^{-1}(0.9)$ නම්, වංගෙඩිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි α යනු තලයේ තිරසට ආනතිය වේ.



(i) <u>ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුව</u>



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

සමමිතියට අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\delta m = \pi (x\tan\alpha)^2\, \delta x\, \rho$, මෙහි ρ යනු ඝනත්වයයි.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\, \rho x^2 . x\, dx \quad (5)}{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\, \rho x^2\, dx \quad (5)}$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h \quad (5)}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h \quad (5)}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

$\therefore$ පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $= h - \frac{3h}{4}$

$$= \frac{h}{4} \quad (5)$$

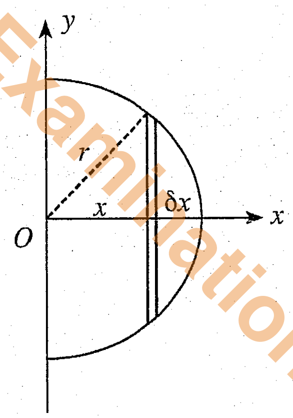
30

(i) <u>ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලය</u>

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\delta m = \pi (r^2 - x^2)\, \delta x\, \sigma,$

මෙහි σ යනු ඝනත්වයයි.

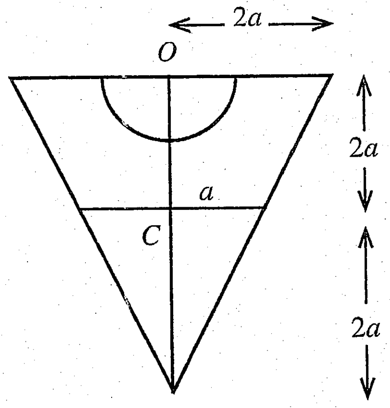


$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma x\, dx \quad (5)}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma\, dx \quad (5)}$$

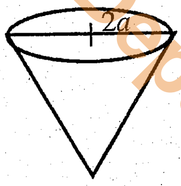
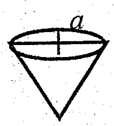
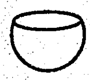
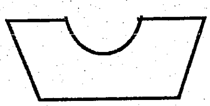
$$= \frac{\left.\left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^r \quad (5)}{\left.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^r \quad (5)}$$

$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad (5)$$



ඝනත්වය σ

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර ↓
	$\frac{16}{3}\pi a^3\rho$ (5)	a (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{5a}{2}$ (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{3a}{8}$ (5)
	$4\pi a^3\rho$ (5)	$\bar{x}$

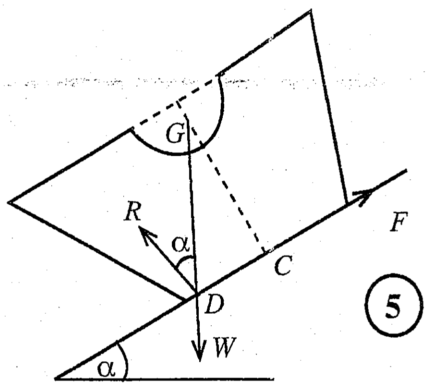
සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$$4\pi a^3\rho\,\bar{x} = \frac{16}{3}\pi a^3\rho a - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{5a}{2} - \frac{2}{3}\pi a^3\rho a\,\frac{3a}{8} \quad (20)$$

$$4\bar{x} = \frac{16}{3}a - \frac{5a}{2} - \frac{a}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{41a}{48} \quad (5)$$

65



(5)

ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට	පෙරළීම වැළැක්වීමට
$\mu \geq \tan\alpha$	$CD < a$
$\therefore\ 0.9 \geq \tan\alpha$ (10)	$\therefore\ CG\tan\alpha < a.$
එනම්, $\alpha \leq \tan^{-1}(0.9)$	එනම්, $\frac{55a}{48}\tan\alpha < a$ (10)
	එනම්, $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{48}{55}\right)$

$\boxed{25}$

17. (*a*) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක අයිතමවලින් 50% ක් A යන්ත්‍රය නිපදවන අතර ඉතිරිය B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලැබේ. A, B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවලින් පිළිවෙළින් 1%, 3% හා 2% ක් දෝෂ සහිත බව දනිමු. සසම්භාවීව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව 0.018 බව දී ඇත. B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවල ප්‍රතිශත සොයන්න.
සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත බව දී ඇති විට, එය A යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක සේවකයින් 100 දෙනකු තම නිවසේ සිට සේවා ස්ථානයට ගමන් කිරීමට ගනු ලබන කාලය (මිනිත්තුවලින්) පහත වගුවේ දී ඇත:

ගනු ලබන කාලය	සේවකයින් ගණන
0 – 20	10
20 – 40	30
40 – 60	40
60 – 80	10
80 – 100	10

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.
පසුව, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිටි සියලු ම සේවකයින් කර්මාන්තශාලාව ආසන්නයේ පදිංචියට ගොස් ඇත. එයින්, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 0 දක්වා ද 0 – 20 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 20 දක්වා ද වෙනස් විය.
නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

(*a*)

	A	B	C
නිෂ්පාදන සම්භාවිතාව	$\frac{1}{2}$	p	$\frac{1}{2}-p$
දෝෂ ඇතිවීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$

D – සම්භාවිතාව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත එකක් වීම

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$0.018 = \frac{1}{100}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{100}\times p + \frac{2}{100}\times\left(\frac{1}{2}-p\right) \quad 10$$

$$3.6 = 1 + 6p + 2 - 4p$$

$$\therefore p = 0.3 \quad 5$$

$\therefore$ B යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 30% 5

$\therefore$ C යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 20% 5

25

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)\ P(A)}{P(D)} \quad 10$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{2}}{0.018} \quad 10$$

$$= \frac{1}{100 \times 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{18}{1000}}$$

$$= \frac{5}{18} \quad 5$$

25

ගන්නා කාලය	f	මධ්‍ය අගය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
0 - 20	10	10	1	1	10	10
20 - 40	30	30	3	9	90	270
40 - 60	40	50	5	25	200	1000
60 - 80	10	70	7	49	70	490
80 - 100	10	90	9	81	90	810
	100				$\sum fy = 460$ (5)	$\sum fy^2 = 2580$ (5)

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{460}{100} = \frac{23}{5} \quad 5$$

හා

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2$$

$$= \frac{2580}{100} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 \quad 5$$

$$= \frac{116}{25}$$

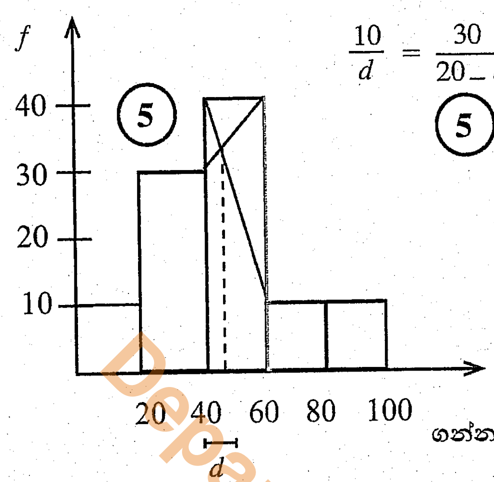
$$\therefore \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{116}{25}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

$\therefore$ මධ්‍යන්‍යය $\mu_x = 10\,\mu_y = 10 \times \dfrac{23}{5} = 46$ 5

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_x = 10\sigma_y = 10 \times \dfrac{2\sqrt{29}}{5} = 4\sqrt{29} \approx 21.54$ 5

මාතය



$\dfrac{10}{d} = \dfrac{30}{20-d}$ 5 $\Rightarrow d = 5$ $\therefore$ මාතය $= 40 + d = 45$ 5

65

(b) නව ව්‍යාප්තිය සඳහා :

$$\mu_y = \frac{1}{100}\left[\sum_1^5 fy - f_1y_1 - f_5y_5 + 20\times 1\right]$$

$$= \frac{1}{100}[460 - 10 - 90 + 20] = \frac{380}{100}$$ 5

$$= \frac{19}{5}$$

$\therefore$ නව මධ්‍යන්‍යය $= 10 \times \dfrac{19}{5} = 38$ 5

$$\sigma_y^2 = \left[\sum_1^5 fy^2 - f_1y_1^2 - f_5y_5^2 + 20\times 1^2\right] - \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}[2580 - 10 - 810 + 20] - \frac{361}{25}$$ 5

$$= \frac{1780}{100} - \frac{361}{25}$$

$$= \frac{84}{25}$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{84}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \quad 5$$

$\therefore$ නව සම්මත අපගමනය $= 10 \times \dfrac{2\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ 5

මාතය වෙනස් නොවේ. 10 ($\because$ මාත පන්තියේ දෙපස සංඛ්‍යාත වෙනස් නොවේ.)

$\boxed{35}$
