අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2021 (2022)

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

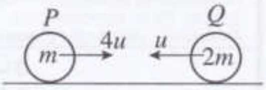
II පත්‍රය

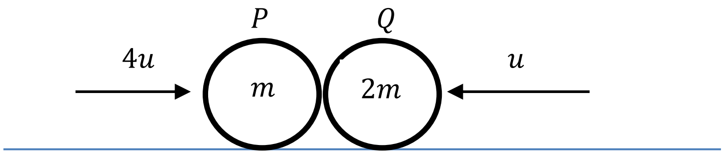
A කොටස	**10 x 25**	**=**	**250**
B කොටස	**05 x 150**	**=**	**750**

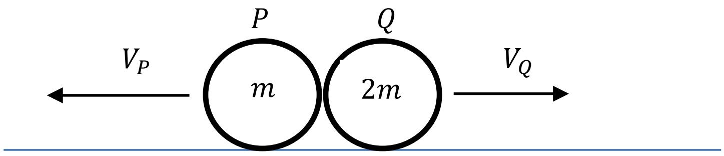
එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

1. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $4u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{4}{5}$ වේ. ගැටුමෙන් පසු P හා Q අංශු එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වන බව පෙන්වන්න.
ගැටුමෙන් පසු P හා Q එකිනෙකට a දුරකින් පිහිටීම සඳහා ගතවන කාලය සොයන්න.







පද්ධතිය සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$

$$0 = (2mV_Q - mV_P) - (4mu - 2mu) \quad 5$$

$$\Longrightarrow 2V_Q - V_P = 2u \quad (1)$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයන්,

$$V_Q + V_P = \frac{4}{5}(4u + u) \quad 5$$

$$V_Q + V_P = 4u \quad (2)$$

$$\therefore V_Q = 2u \text{ හා } V_P = 2u. \quad 5$$

$(1) + (2)$: $V_Q > 0$ හා $V_P > 0$.

$\therefore P$ හා Q ගැටුමෙන් පසු ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශා වලට චලනය වේ. 5

$$\underline{V}(P,Q) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,Q)$$

$$= \overleftarrow{2u} + \overleftarrow{2u}$$

$$= 4u \leftarrow$$

අවශ්‍ය කාලය $= \frac{a}{4u}$. 5

P හා Q සඳහා $I = \Delta(m\underline{v})$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය

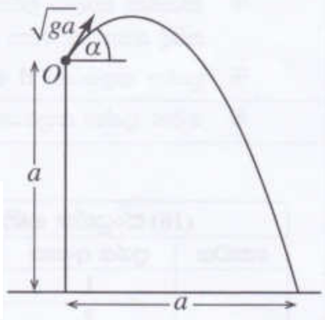
V_p හා V_Q දෙකම සඳහා

$V_p > 0$ හා $V_Q > 0$ දෙකම සඳහා හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශන සඳහා

$\frac{a}{4u}$ තිබීම.

25

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තිරස් ගෙබිමක සිට a සිරස් දුරකින් වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $\sqrt{ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් ගෙබිම හා ගැටේ. $\tan\alpha = 1+\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.



From O to A $S = ut + \frac{1}{2}at^2$:

$$\rightarrow \quad a = \sqrt{ga}\cos\alpha\ t \quad \text{--------------------} \quad (1) \qquad 5$$

$\rightarrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

$$\uparrow \quad -a = \sqrt{ga}\ \sin\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{--------------------} \quad (2) \qquad 5$$

$\uparrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

(1) මගින්, $t = \frac{a}{\sqrt{ga}\cos\alpha}$.

(2) මගින්, $-a = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{ga\,cos^2(\alpha)}$.

$\therefore \quad -2 = 2\tan\alpha - (1 + tan^2\alpha)$. 5

$\tan\alpha$ හි වර්ගජ සමීකරණය සඳහා

එනම්, $tan^2\alpha - 2\tan\alpha - 1 = 0$.

$\therefore \tan\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ 5

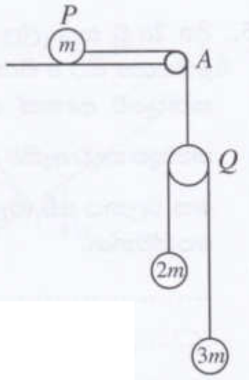
$\pm$ දෙකම

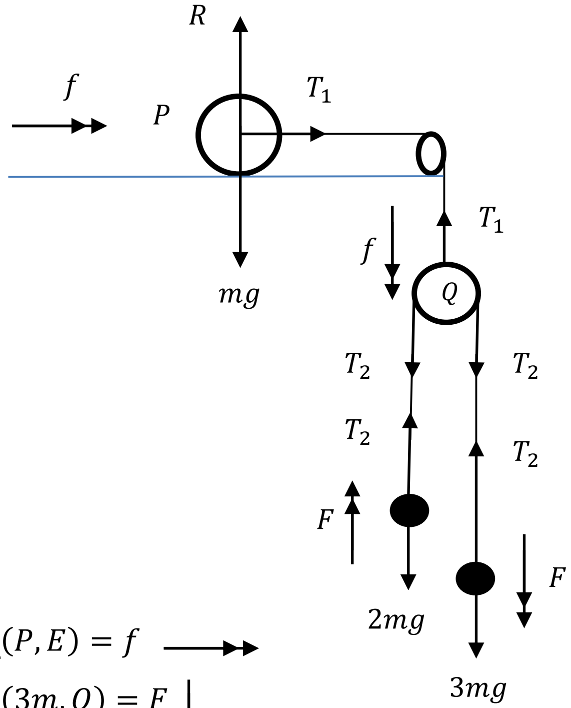
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ බැවින් $(-)$ ලකුණ ගත නොහැක.

$\therefore \tan\alpha = 1 + \sqrt{2}$. 5

නිවැරදි ලකුණ තෝරා ගැනීම

3. සුමට තිරස් මේසයක් මත ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තබා, එය මේසයේ දාරයෙහි වූ A ලක්ෂ්‍යයෙහි ඇති අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සුමට සැහැල්ලු Q කප්පියකට සම්බන්ධ කර ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, Q කප්පිය මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ස්කන්ධ $2m$ හා $3m$ වන අංශු සම්බන්ධ කර ඇත. අංශු හා තන්තු සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. Q හි ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.





5

f f

$\underline{a}(P, E) = f \rightarrow$

$\underline{a}(3m, Q) = F \downarrow$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීම;

$P \quad \rightarrow \quad T_1 = mf$ 5

P සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

$Q \quad \downarrow \quad 2T_2 - T_1 = 0$ 5

Q සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

$2m \quad \uparrow \quad T_2 - 2mg = 2m(F - f)$ 5

$2m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

$3m \quad \downarrow \quad 3mg - T_2 = 3m(F + f)$ 5

$3m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

හෝ

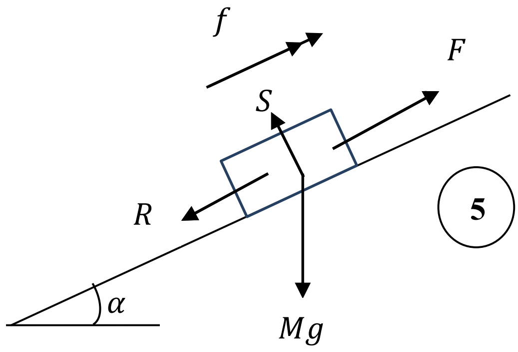
Q, $2m$ හා $3m$ $\downarrow$ $T_1 - 2mg - 3mg = 2m(f - F) - 3m(f + F)$

$Q, 2m$ හා $2m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

සටහන: ඕනෑම ස්වායක්ත සමීකරණ 4කට 20

25

4. ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ක ආනතියක් සහිත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට නියත ත්වරණයකින් ගමන් කරයි. එහි චලිතයට R N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එහි වේගය 36 km h^{-1} සිට 72 km h^{-} දක්වා වැඩි කිරීමට කාරය ගමන් කළ දුර 500 m වේ. එහි වේගය 54 km h^{-1} වන විටදී කාරය යෙදූ ජව නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



5

S ඇතිව හෝ නොමැතිව බල ලකුණු කිරීම සඳහා

$\sin\alpha = \frac{1}{20}$

$\frac{36 \times 1000}{3600} = 10\ ms^{-1}$

$\frac{72 \times 1000}{3600} = 20\ ms^{-1}$ 5

$\frac{54 \times 1000}{3600} = 15\ ms^{-1}$

වේග තුනෙහිම පරිවර්තන සඳහා

$\nearrow v^2 = u^2 + 2as$:

$20^2 = 10^2 + 2f(500)$ 5

$f = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} ms^{-2}$

$v^2 = u^2 + 2as \nearrow$ යෙදීම

$\nearrow \underline{F} = m\underline{a}$: 5

$F - R - Mg\sin\alpha = Mf$

$\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීම

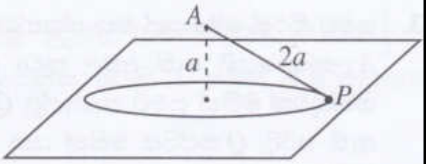
$P = F \cdot V$

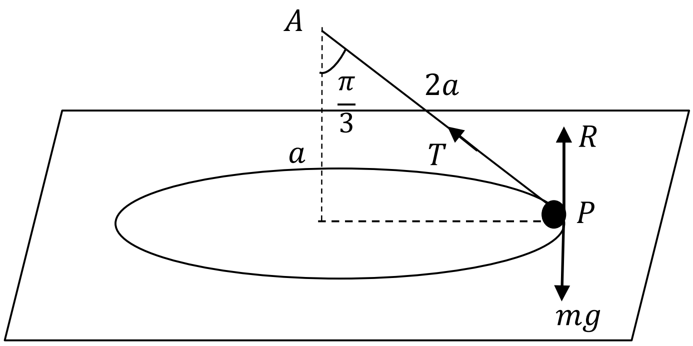
$= F \cdot 15$ 5

$P = F \cdot 15$ යෙදීම

25

5. දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් සුමට තිරස් මේසයක සිට a සිරස් දුරක් ඉහළින් වූ A අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඇඳා ඇති ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, තන්තුව තදව ඇතිව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ඒකාකාර වේගයෙන් තිරස් වෘත්තයක මේසය මත චලනය වේ (රූපය බලන්න). මේසය මගින් P මත ඇති කරන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{5}{6}\,mg$ බව පෙන්වන්න.





5 | බල සඳහා

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්:

$$\leftarrow T\sin\frac{\pi}{3} = m.\frac{ga}{2(2a\sin\frac{\pi}{3})}$$ 5 | $\underline{F} = m\underline{a}$ $\leftarrow$

$$\therefore T = \frac{mg}{3}.$$ 5 | $T = \frac{mg}{3}$ තිබීම

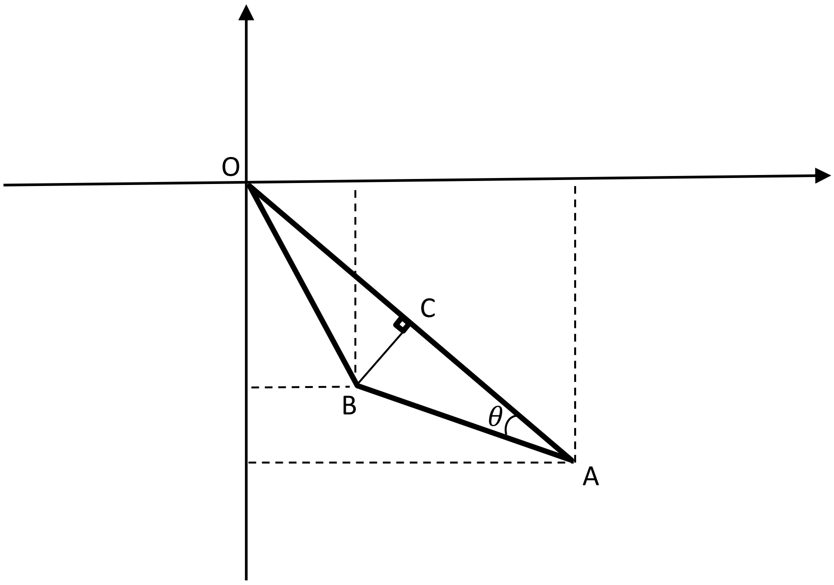
$$\uparrow\ R - mg + T\cos\frac{\pi}{3} = 0$$ 5 | $\underline{F} = m\underline{a}$ $\uparrow$

$$\therefore R = mg - \frac{mg}{6}$$

$$= \frac{5}{6}mg$$ 5 | පිළිතුර සඳහා පියවර

25

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ වේ. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ භාවිතයෙන්, $O\hat{A}B$ සොයන්න.
C යනු OA මත $O\hat{C}B=\frac{\pi}{2}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ සොයන්න.



$\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{i} - 2\underline{j}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\underline{i} + 3\underline{j}$ හා

$\overrightarrow{AB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - (2\underline{i} - 3\underline{j})$ 5

$= -\underline{i} + \underline{j}$

$\underline{i}$ හා $\underline{j}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ 5

$2 + 3 = \sqrt{13}\sqrt{2}\ \cos\theta$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ අර්ථ දැක්වීම හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ 5

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ තිබීම

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\, \overrightarrow{OA}$, මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$, හා $\overrightarrow{CB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - \lambda(2\underline{i} - 3\underline{j})$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ gives as $2(1-2\lambda) - 3(-2+3\lambda) = 0$ 5

තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් $O\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ අවශ්‍යතාවයට

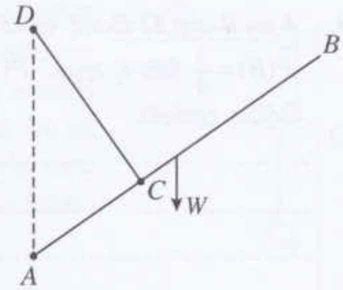
$\therefore \quad \lambda = \frac{8}{13}$ 5

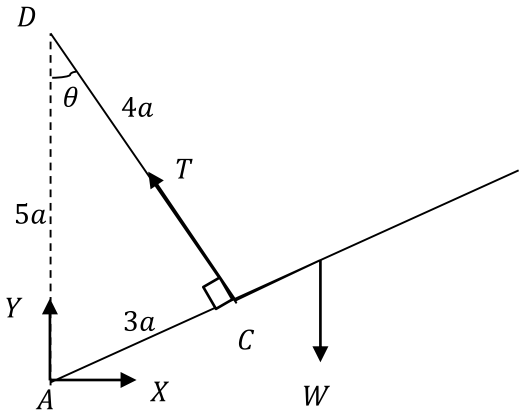
λ හි අගය හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

හා $\quad \overrightarrow{OC} = \frac{8}{13}(2\underline{i} - 3\underline{j})$

25

7. දිග $8a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක, එහි A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් දණ්ඩ මත $AC = 3a$ වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර A ට සිරස්ව ඉහළින් $AD = 5a$ වන පරිදි වූ D අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත (රූපය බලන්න). දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ පවතී. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{16}{15}W$ බව පෙන්වන්න.
A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය ද සොයන්න.





5 | බල සඳහා

$A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ 5 | $A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$; තිබීම

දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා:

$A \curvearrowright$ $W \times 4a\cos\theta - T \times 3a = 0$ 5 | T සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණයක් සඳහා

$\therefore T = \frac{4W}{3}\cos\theta$

$= \frac{4W}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16W}{15}$ 5 | පිළිතුර සඳහා පියවර

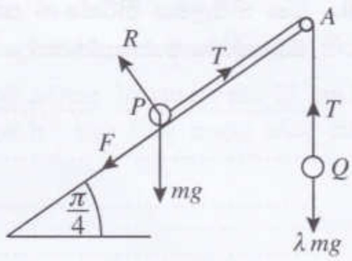
$\rightarrow X = T\sin\theta$

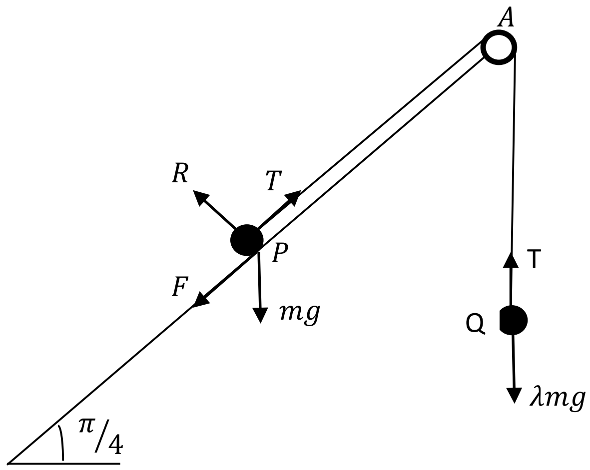
$= \frac{16W}{15} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{16W}{25}$ 5 | $\frac{16W}{25}$ තිබීම

25

8. තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තබා ඇත. රූපයෙහි දක්වා ඇති පරිදි, ආනත තලයේ දාරයට A හි දී සවිකර ඇති අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් P අංශුවට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය λmg වූ Q අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. PA රේඛාව, ආනත තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර තන්තුව තදව ඇතිව P හා Q අංශු දෙක සමතුලිතතාවයේ පවතී. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න. (අදාළ බල රූපයෙහි ලකුණු කර ඇත.)





For the equilibrium:

P ↖

$$R - mg\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad 5$$

$$\therefore \quad R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

R හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

Q ↑

$$T - \lambda mg = 0 \quad 5$$

$$\therefore \quad T = \lambda mg$$

T හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

P ↗

$$T - F - mg\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad 5$$

$$\therefore \quad F = \lambda mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\lambda - 1)$$

F හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

P හි සමතුලිතතාවය සඳහා

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R} \quad 5$$

ලිස්සා නොයෑමට, මාපාංකය සහිත අවශ්‍යතාවයට

$$\therefore \quad \left|\sqrt{2}\lambda - 1\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad 5$$

පිළිතුර සඳහා පියවර

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක **ස්වායත්ත** සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{1}{5}$ හා $P(B)=\frac{3}{4}$ බව දී ඇත. $P(A\cup B)$, $P(A|A\cup B)$ හා $P(B|A')$ සොයන්න; මෙහි A' මගින් A හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

$P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{3}{4}$

A හා B ස්වායත්ත නිසා,

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ 5 — ස්වායත්තතාව සඳහා අවශ්‍යතාවය

$=\frac{3}{20}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 5 — $P(A\cup B)$ සඳහා සමීකරණය

$=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=\frac{4}{5}$

$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{1/5}{4/5}=\frac{1}{4}$ 5 — $\frac{1}{4}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}$

$P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=\frac{3}{5}$ 5 — $\frac{3}{5}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

(හෝ $P(B\cap A')=P(B)\cdot P(A')=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$)

$P(B|A')=\frac{3/5}{4/5}=\frac{3}{4}$ 5 — $\frac{3}{4}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

25

10. ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ පහක කුලකයක මධ්‍යන්‍යය 6 ද පරාසය 10 ද වේ. එයට මාතයන් දෙකක් ඇත. මධ්‍යස්ථය, මාතයන්ගෙන් වෙනස් වේ නම්, නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

සංඛ්‍යා ආරෝහණ පිළිවෙලට යැයි ගනිමු.

a, a, b, c, c

පරාසය 10 නිසා $c - a = 10.$ 5 | පරාසය සඳහා අවශ්‍යතාවය

$\therefore c = a + 10$ ———(1)

මධ්‍යන්‍යය 6 නිසා, $\frac{2a+b+2c}{5} = 6.$ ———(2) 5 | මෙය සඳහා හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

(1) හා (2)මඟින් $4a + b + 20 = 30$

එනම්, $4a + b = 10$ ———(3) 5 | නිරීක්ෂණ නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණයකට

a හා b ධන නිඛිල නිසා,

එවිට, (3) මඟින් $4a \leq 9$ හා

a සඳහා ගත හැකි අගයන් 1 හා 2 ලැබේ.

$a = 1$ නම්, එවිට $b = 6.$

$a = 2$ නම් එවිට, $b = 2,$ හා මධ්‍යන්‍යය, මාතයන්ගෙන් වෙනස් නිසා මෙය විය නොහැක. 5 | මධ්‍යන්‍යය ≠ මාතයන් යෙදීමට

$\therefore$ සංඛ්‍යා $1, 1, 6, 11, 11$ වේ. 5 | 1, 1, 6, 11, 11 තිබීම.

25

11. (*a*) P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට සිරස්ව උඩු අතට u m s^{-1} ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ තත්පර 4 කට පසුව A ලක්ෂ්‍යයක් වෙත ළඟා වන අතර, තවත් තත්පර 2 කට පසුව නැවත A වෙත පැමිණෙයි. P අංශුව දෙවනවරට A හි ඇති මොහොතේදී තවත් Q අංශුවක් O හි සිට සිරස්ව උඩු අතට එම u m s^{-1} ප්‍රවේගයෙන්ම ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එකම රූපසටහනක, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

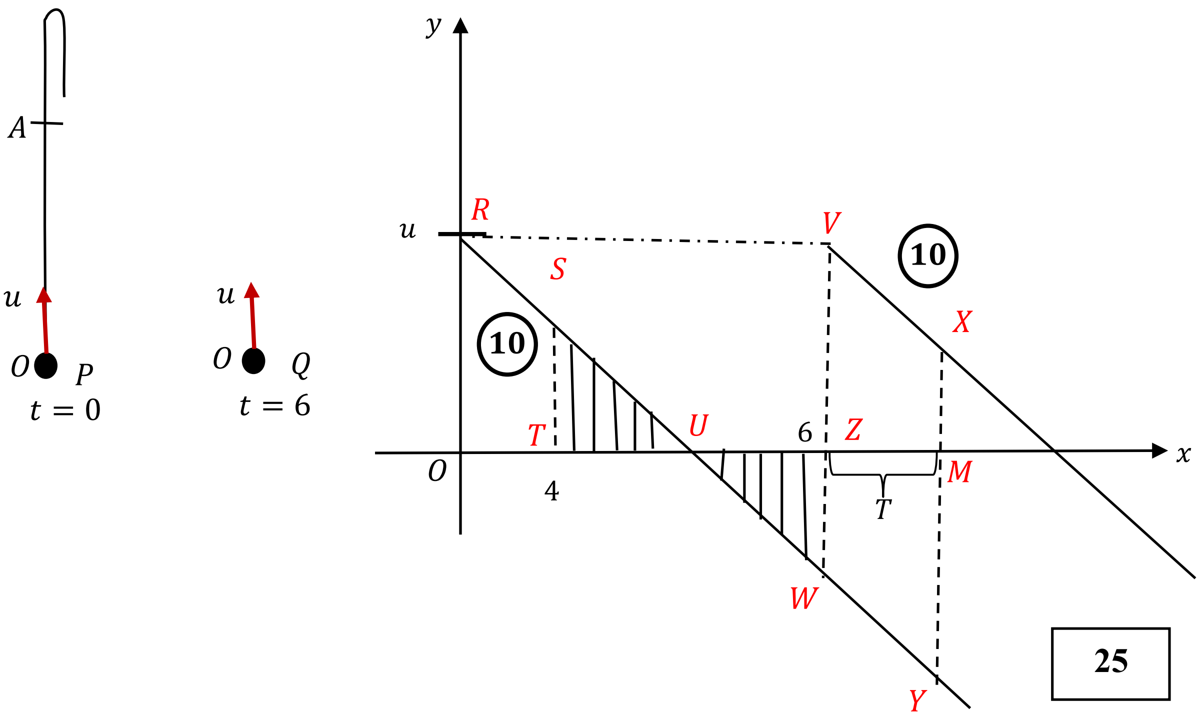
ඒ නයින්, g ඇසුරෙන් u හි අගය ද OA හි උස ද, P සමග ගැටීමට Q ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

(*b*) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතකදී, S වලින් d km දුරක් නැගෙනහිරින් P බෝට්ටුවක් පිහිටන අතර S වලින් $\sqrt{3}\,d$ km දුරක් දකුණෙන් වෙනත් Q බෝට්ටුවක් පිහිටයි. P බෝට්ටුව, පොළොවට සාපේක්ෂව $2u$ km h^{-1} ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක, S අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර Q බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $3u$ km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක P අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි.

(i) P බෝට්ටුවට, S නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{\sqrt{3}u}$ h බව ද

(ii) Q බෝට්ටුව P බෝට්ටුව අල්ලා ගැනීමට පෙර P බෝට්ටුව S නැව අල්ලා ගන්නා බව ද පෙන්වන්න.

(a)



STU ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ UZW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නිසා

$TU = UZ.$

$TZ = 2 \Longrightarrow TU = 1.$ 5

$\therefore\ OU = 5.$ 5

ROU ත්‍රිකෝණයෙන් $g = \frac{u}{5}$.

$\therefore u = 5g.$ 5

STU ත්‍රිකෝණයෙන්, $g = \frac{ST}{1} = ST.$ 5

OA හි උස $=$ $ORST$ හි වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2}(OR + ST) \times OT$$ 5

$$= \frac{1}{2}(u + g) \times 4$$ 5

$$= \frac{1}{2} \times 6g \times 4$$

$$= 12g$$ 5

P සමග ගැටීමට Q ගන්නා කාලය T යැයි ගනිමු.

$OA =$ $VZMX$ වර්ගඵලය $+$ $WZMY$ වර්ගඵලය

$=$ $VWYX$ වර්ගඵලය 10

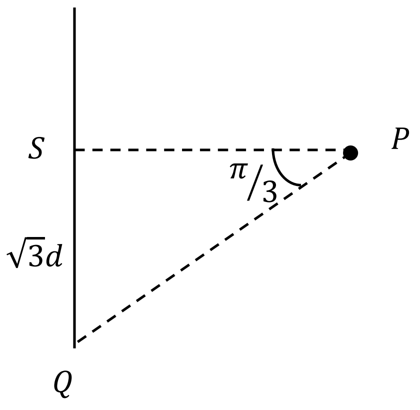
$$= \frac{1}{2}(VW + XT) \times ZM$$

$$\therefore\ 12g = \tfrac{1}{2}(6g + 6g) \times T$$ 10

$\therefore T = 2$ sec. 5

60

(b)

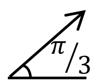


$\underline{V}(S, E) = \uparrow u$

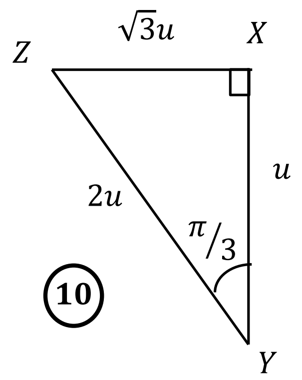
$\underline{V}(P, E) = 2u$

$\underline{V}(Q, E) = 3u$

$\underline{V}(P, S) = \leftarrow$

$\underline{V}(Q, P) =$ 

(i)



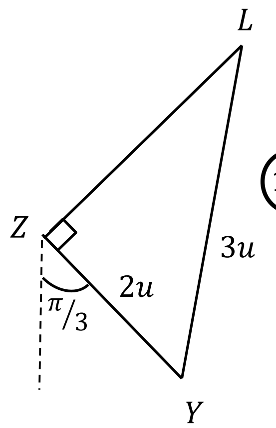
10

$$\underline{V}(P,S) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,S) \quad 5 + 5$$
$$= \underline{V}(E,S) + \underline{V}(P,E)$$
$$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$
$$= \overrightarrow{XZ}$$

අවශ්‍ය කාලය $= \dfrac{d}{XZ} = \dfrac{d}{\sqrt{3}u}\, h.$ 5

25

(ii)



10

$$\underline{V}(Q,P) = \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(E,P) \quad 5$$
$$= \underline{V}(E,P) + \underline{V}(Q,E)$$
$$= \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YL}$$
$$= \overrightarrow{ZL}$$

$ZL = \sqrt{(3u)^2 - (2u)^2} = \sqrt{5}u$ 5

P හමුවීමට Q ගන්නා කාලය t_2 යැයි ගනිමු.

එවිට, $t_2 = \dfrac{\sqrt{3}\, d \sec(\pi/6)}{\sqrt{5}\, u}$

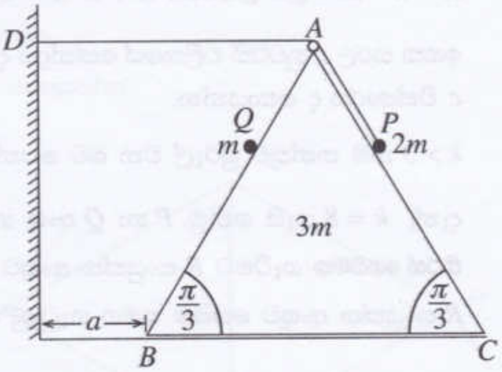
$= \dfrac{2d}{\sqrt{5}\, u} h.$ 10

$\therefore\ t_1 < t_2.$ 10

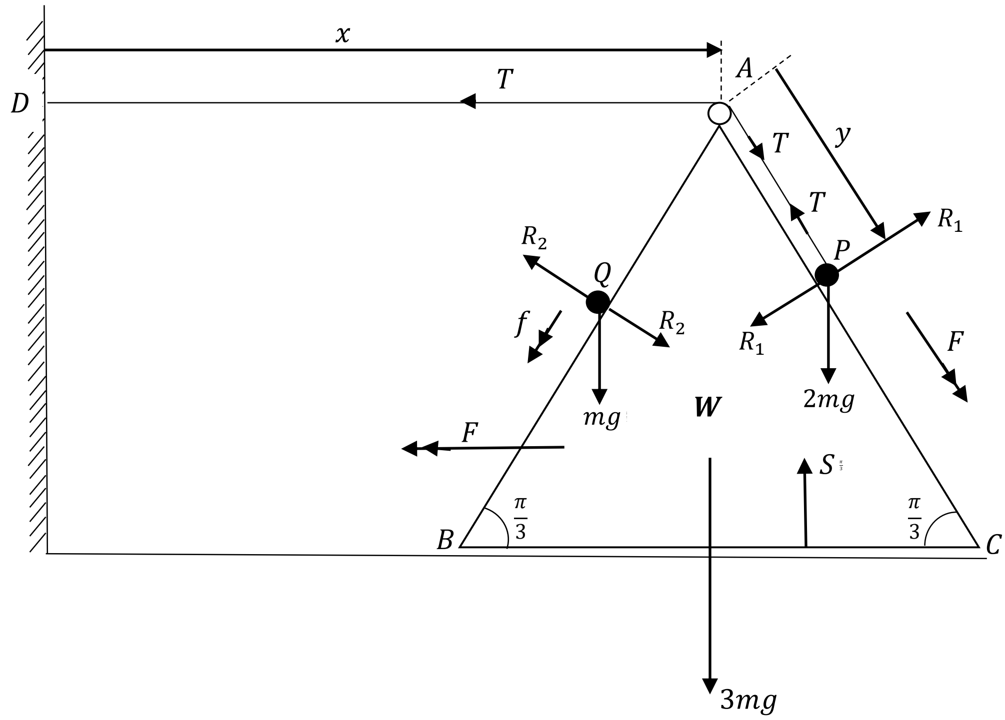
70

---

12. (a) රූපයෙහි ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය, $AB = BC = AC = 6a$ ද වන, BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා AC රේඛා, ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි කුඤ්ඤයෙහි B ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට a දුරකින් වූ සිරස් බිත්තිය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හි සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන දිග $5a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් AC මත තැබූ ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර බිත්තිය මත වූ අචල D ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් AB මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $AP = AQ = a$ ලෙස ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය බිත්තියෙහි ගැටෙන මොහොතෙහිදී කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව Q හි ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



a)



$x + y =$නියතයකි **5**

$\therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0$. ________________(1) **5**

$\underline{a}(W, E) = F \twoheadleftarrow$ යැයි ගනිමු.

$\therefore \ \underline{a}(P, W) = F \searrow$ ((1) මගින්) **5**

$\underline{a}(Q, W) = f \swarrow$ යැයි ගනිමු.

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්:

5 (බල සඳහා)   5 (ත්වරණ සඳහා)

$P \searrow$ $\quad 2mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - T = 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 5 (සමීකරණයට)

$Q \swarrow$ $\quad mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(f + F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 5 (සමීකරණයට)

5   5

$(P, Q$ හා $W)$ පද්ධතිය සඳහා, $\leftarrow$

$$T = 3mF + 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + m\left(F + f\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$ 5 (සමීකරණයට)

5   5   5   5

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්:

$\leftarrow$ W $\quad a = \frac{1}{2}Ft^2$ 5

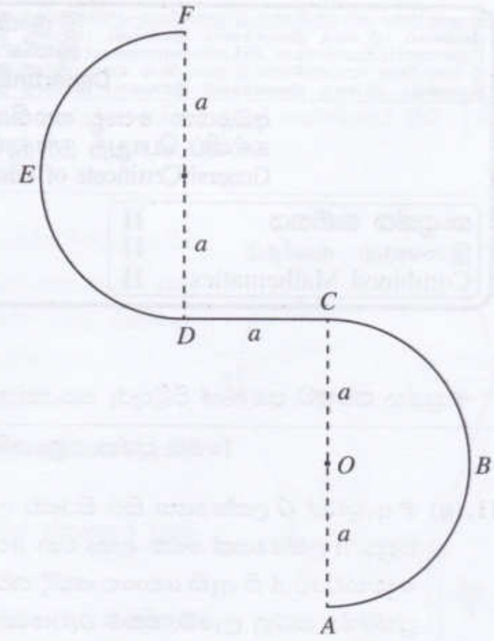
$v = u + at$ යෙදීමෙන්:

$v = ft$ 5

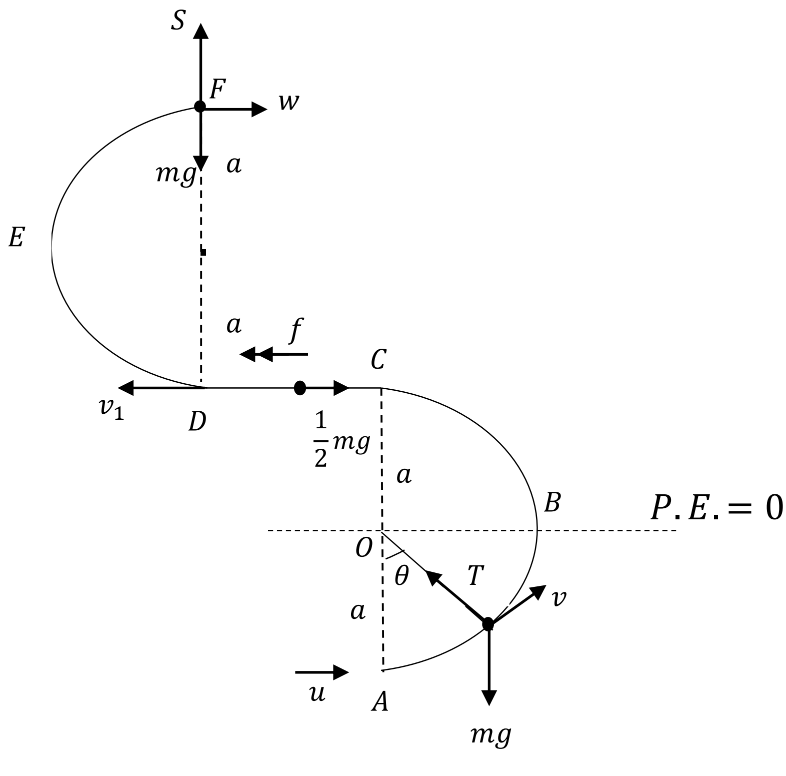
$\boxed{80}$

(*b*) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $ABCDEF$ තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස, කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. CD කොටස, දිග a වූ තුනී **රළු** තිරස් කම්බියක් වේ. DEF කොටස ද අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. AC හා DF විෂ්කම්භ සිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබලුවක් A හි තබා තිරස්ව $u\left(>3\sqrt{ag}\right)$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි. පබලුවෙහි C සිට D දක්වා චලිතය තුළ පබලුව මත කම්බිය මගින් ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයේ විශාලත්වය $\frac{1}{2}mg$ බව දී ඇත. P පබලුවෙහි A සිට C දක්වා චලිතය තුළ $\overrightarrow{OA}$ සමග $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට එහි v වේගය $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

F හිදී කම්බිය හැරයාමට මොහොතකට පෙර P පබලුවේ w වේගය $w^2 = u^2 - 9ag$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේදී කම්බිය මගින් P පබලුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



b)



ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}mv^2 - mga\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga \quad 15$$

PE (5) + KE (5) + සමීකරණය (5)

$$\therefore \; v^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta) \quad 5$$

$\theta = \pi$ විට, $v^2 = u^2 - 4ga$ ______________________(1) 5

25

C සිට D දක්වා, $\leftarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$:

$$-\frac{1}{2}mg = mf \quad 5$$

$$\therefore \quad f = -\frac{g}{2} \quad 5$$

$\longleftarrow$ $v^2 = u^2 + 2as$: $v_1^{\;2} = (u^2 - 4ga) - 2\cdot\frac{g}{2}a$

$$= u^2 - 5ga. \quad 10$$

(1) භාවිතයෙන්, $v_2^{\;2} = v_1^{\;2} - 4ga$ 10

$$= u^2 - 9ga. \quad 5$$

F හිදී: $\underline{F} = m\underline{a}$ $\downarrow$

$$mg - S = m\frac{v_2^{\;2}}{a} \quad 5$$

$$\therefore \; S = mg - \frac{m}{a}(u^2 - 9ga) \quad 5$$

$$= \frac{m}{a}(10ag - u^2) \quad 5$$

70

---

13. ස්වභාවික දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට $5a$ දුරක් පහළින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ බව පෙන්වන්න.

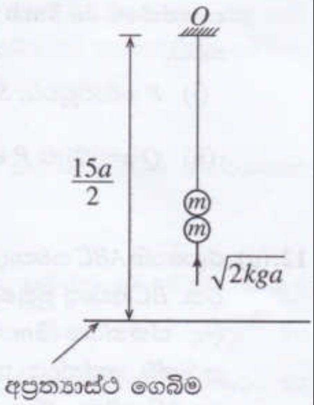
දැන්, ස්කන්ධය m වූ වෙනත් Q අංශුවක් සිරස්ව ඉහළට ගමන් කර P සමග ගැටී හාවී R සංයුක්ත අංශුවක් සාදයි. P අංශුව සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර Q අංශුවේ වේගය $\sqrt{2kga}$ වේ. R චලිතවීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය සොයන්න.

තන්තුව නොබුරුල්ව ඇතිව පසුව සිදුවන චලිතයේදී R සංයුක්ත අංශුවට O සිට දුර වන x යන්න $\ddot{x}+\frac{g}{2a}(x-6a)=0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$X = x - 6a$ ලෙස ලියමින්, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ වේ.

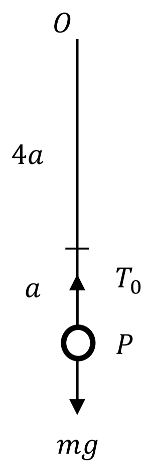
ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය ද, $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් c විස්තාරය ද සොයන්න.

$k > 3$ නම් තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.



දැන්, $k = 8$ යැයි ගනිමු. P හා Q අංශු හාවූ මොහොතේ සිට O ලක්ෂ්‍යයට $\frac{15}{2}a$ දුරක් පහළින් වූ **අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමක** ගැටීමට R සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය සොයන්න.

R සංයුක්ත අංශුව ගෙබිම සමග ගැටුණු පසු ළඟා වන උපරිම උස ද සොයන්න.



P හිදී සමතුලිතතාවය සඳහා,

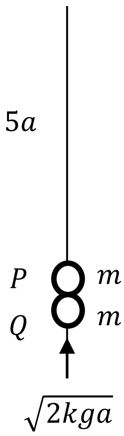
$\uparrow \quad T_0 = mg$ 5

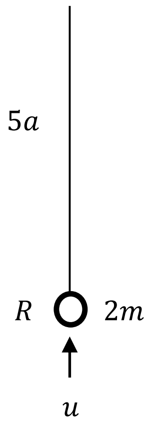
$T_0 = \frac{\lambda a}{4a} = \frac{\lambda}{4}$ 5

$\therefore \lambda = 4mg$

5

15



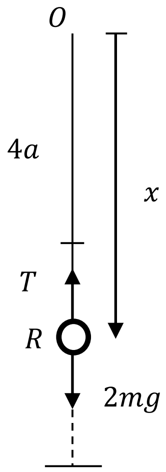


P හා Q සඳහා $\underline{I} = \triangle\,(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\uparrow\; 0 = 2mu - m\sqrt{2kga}$ 5

$\therefore u = \sqrt{\dfrac{kga}{2}}$ 5

10



R සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\uparrow\; T - 2mg = -2m\ddot{x}$ 10

$T = 4mg\dfrac{(x-4a)}{4a}$ 5

$\therefore \dfrac{mg}{a}(x-4a) - 2mg = -2m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \dfrac{g}{2a}(x-6a) = 0$ ________(1) 5

20

$X = x - 6a$

$\therefore \dot{X} = \dot{x}$

$\therefore \ddot{X} = \ddot{x}$ 5

එවිට (1) $\Rightarrow \quad \ddot{X} + \omega^2 X = 0$; මෙහි $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2a}}$. 5

10

කේන්ද්‍රය $X = 0$ මඟින් දෙනු ලැබේ.

එනම්, $x = 6a$. 5

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ________ (2)

$x = 5a$ විට, $X = -a$ හා $\dot{X} = -\frac{1}{2}\sqrt{2kga}$. 5

එවිට $(2) \Rightarrow \frac{kga}{2} = \frac{g}{2a}(c^2 - a^2)$.

$\Rightarrow ka^2 = c^2 - a^2$.

$\Rightarrow c = \sqrt{k+1}\, a$. 5

15

$k > 3$ යැයි ගනිමු. එවිට, $c > 2a$.

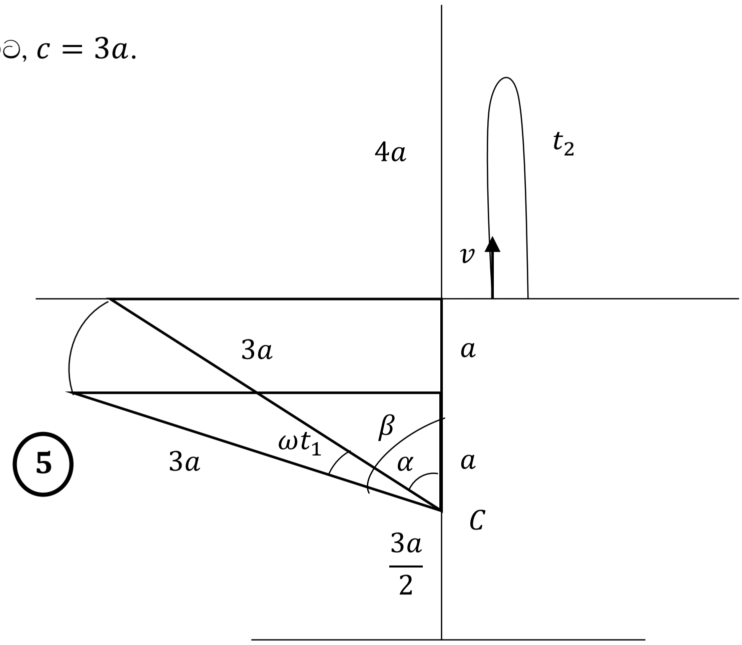
$\therefore$ විස්තාරය $> 2a$. 5

$\therefore$ තන්තුව බුරුල් වේ. 5

10

$\boxed{k = 8}$

එවිට, $c = 3a.$



$$\cos\beta = \frac{1}{3} \quad 5$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \quad 5$$

$$\omega t_1 = \beta - \alpha$$

$$\therefore\ t_1 = \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha) \quad 5$$

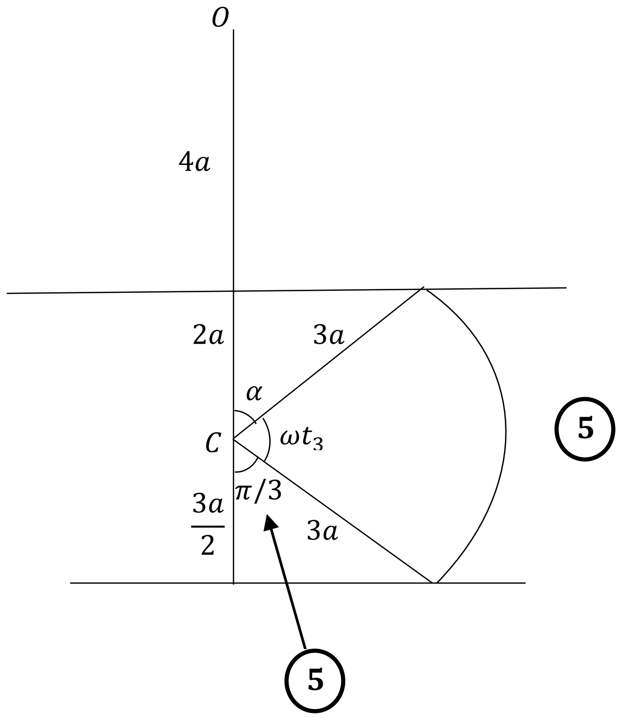
දැන්, $v^2 = \frac{g}{2a}(9a^2 - 4a^2)$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{5}{2}ga} \quad 5$$

ගුරුත්වය යටතේ: $\uparrow\ s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$0 = vt_2 - \frac{1}{2}gt_2{}^2. \quad 5$$

$$\therefore\ t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{5}{2}ga} = \sqrt{\frac{10a}{g}} \quad 5$$



$$\omega t_3 = \frac{2\pi}{3} - \alpha \quad 5$$

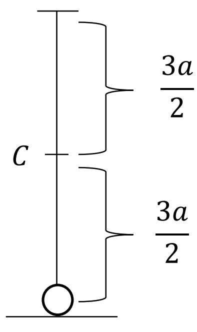
$$\therefore\ t_3 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha) + \sqrt{\frac{10a}{g}} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$= \sqrt{\frac{10a}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}}\left\{\frac{2\pi}{3} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - 2\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\} \quad 10$$

$\boxed{60}$



ගෙබිමෙහි ගැටීමෙන් පසු, R සරල අනුවර්තී චලිතයේ පමණක් යෙදේ. 5

$$\therefore \text{ උපරිම උස } = \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2}$$

$$= 3a$$

5

$\boxed{10}$

---

14. (*a*) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික යැයි ද $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු.
$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ නම්, $\lambda = 0$ හා $\mu = 0$ බව පෙන්වන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ද වේ. AE (දික්කළ) හා BC රේඛා F හි දී හමුවේ. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ හා $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන් $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{4}$ බව පෙන්වන්න.
$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ වන්නේ ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ.
ACF ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, α හා β හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) ABC යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D, E, F යනු පිළිවෙළින් AB, BC හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. විශාලත්ව $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P$ හා αP වූ බල පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}$ හා $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියාකරයි. මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය, $\overrightarrow{AC}$ ට සමාන්තරව ක්‍රියාකරන බව දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.
බල පද්ධතිය, A හරහා ක්‍රියාකරන විශාලත්වය R වූ තනි බලයකට හා විශාලත්වය G වූ යුග්මයක් සමගින් තුල්‍ය වේ. R හා G හි අගයන් සොයන්න.
මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව ලියා දක්වා සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A හි සිට ඇති දුර සොයන්න.
දැන්, විශාලත්වය H වූ යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. මෙම අලුත් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය B ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි. H හි අගය හා මෙම යුග්මය ක්‍රියාකරන අත සොයන්න.

(a)

$\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$ and $\underline{a} \nparallel \underline{b}$

$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$ ___________(1)

If $\lambda \neq 0$ නම්, එවිට $\underline{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\underline{b}.$ 5

මෙය දෙන ලද අවශ්‍යතාවට පරස්පර වේ.

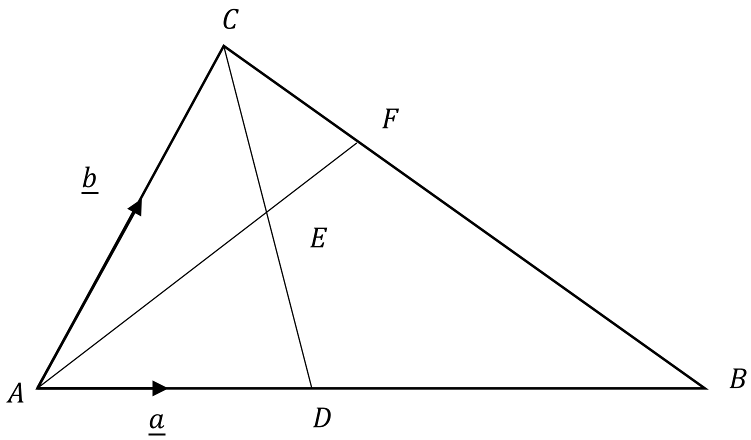
$\therefore\ \lambda = 0.$ 5

දැන්, (1) මඟින් $\mu\underline{b} = \underline{0}$ ලැබේ.

$\underline{b} \neq \underline{0}$ නිසා, $\mu = 0$ 5

$\therefore\ \lambda = 0$ හා $\mu = 0$

$\boxed{15}$



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ 5

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ 5

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$ 5

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right)$

$= \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}.$ 5

$\boxed{20}$

$AF \parallel AE$ (හෝ A, E, F ඒක රේඛීය වේ) 5

$CF \parallel CB$ (හෝ C, F, B ඒක රේඛීය වේ) 5

$\boxed{10}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ 5

$\therefore \alpha\overrightarrow{AE} = \underline{b} + \beta\overrightarrow{CB}$

$\therefore\ \alpha\left(\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}\right) = \underline{b} + \beta\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$ 5

$\therefore\ \alpha\underline{a} + 2\alpha\underline{b} = 4\underline{b} + 4\beta(-\underline{b} + \underline{a})$

$\therefore (\alpha - 4\beta)\underline{a} + (2\alpha + 4\beta - 4)\underline{b} = \underline{0}$ 5

$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$ හා $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ මගින්,

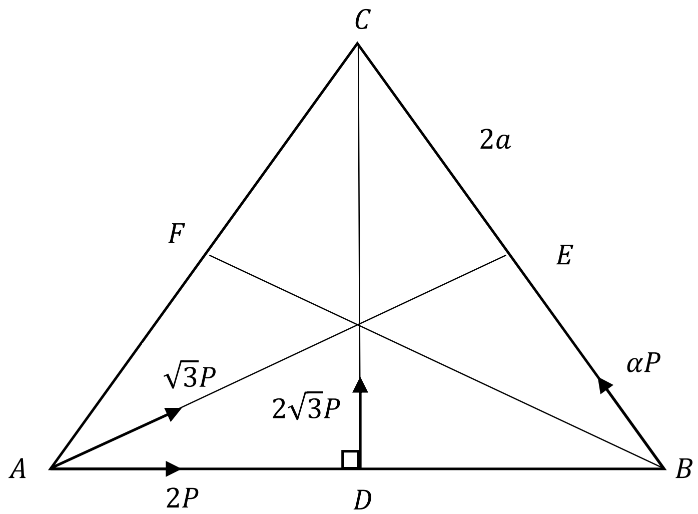
$\alpha - 4\beta = 0$ හෝ $2\alpha + 4\beta - 4 = 0$ ලැබේ.

$\therefore\ \alpha = \frac{4}{3}$ හා $\beta = \frac{1}{3}$

5 5

25

(b)



$\rightarrow X = 2P + \sqrt{3}P\cos\frac{\pi}{6} - \alpha P\cos\frac{\pi}{3}$ 5

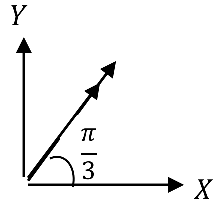
$= 2P + \frac{3P}{2} - \frac{\alpha P}{2}$

$= \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$

$\uparrow Y = \sqrt{3}P\sin\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}P + \alpha P\sin\frac{\pi}{3}$ 5

$= \frac{\sqrt{3}}{2}P + 2\sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha P$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P$



$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{Y}{X} \quad 5$$

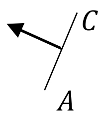
$$\therefore Y = \sqrt{3}X$$

$$i.e.\ \frac{\sqrt{3}}{2}(5+\alpha)P = \sqrt{3}.\frac{1}{2}(7-\alpha)P$$

$$\therefore\ \alpha = 1 \quad 5$$

$\boxed{20}$

හෝ

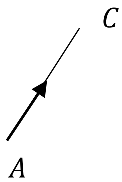


$$\underbrace{\alpha P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right) - 2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{10} = 0. \quad 5$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 + 2 - 2.$$

$$\Rightarrow \alpha = 1. \quad 5$$

$\boxed{20}$



$$R = \sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2P\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) \quad 10$$

$$= \frac{3P}{2} + \frac{2P}{2} + \frac{6P}{2} + \frac{P}{2}$$

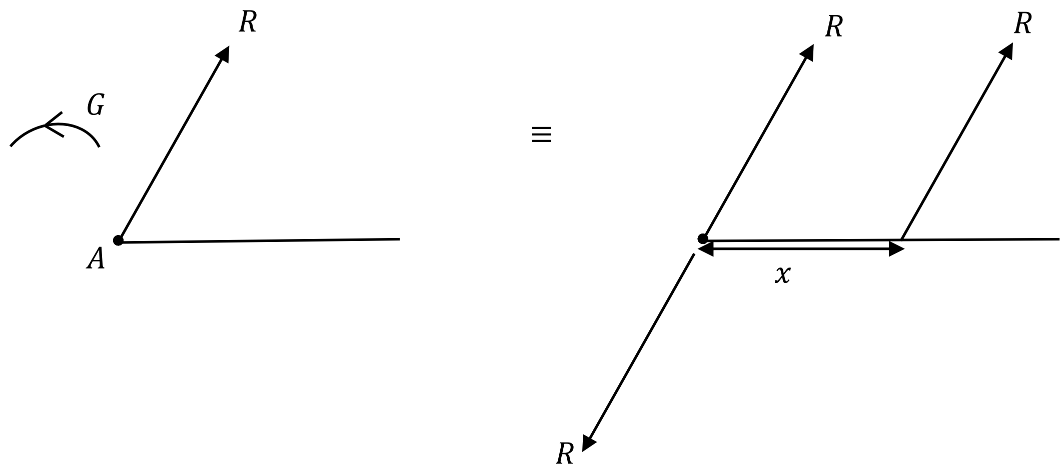
$$= 6P. \quad 5$$

$$A\ ;\ G = 2\sqrt{3}P.a + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).2a \quad 5$$

$$G = 2\sqrt{3}Pa\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

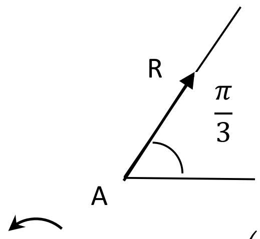
$$G = 3\sqrt{3}Pa \quad 5$$

$\boxed{25}$



සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $= \; R = 6P$ 5

දිශාව:

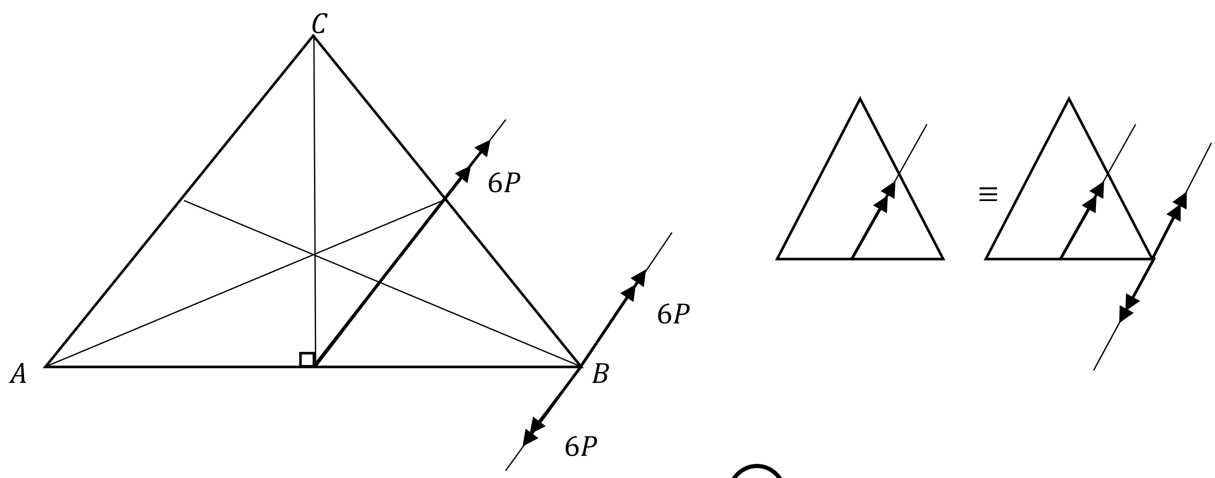


5

$A\,;\; 3\sqrt{3}Pa = 6P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$ 5

$\therefore x = a$ 5

20



5

$$\curvearrowleft H = 6P.a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

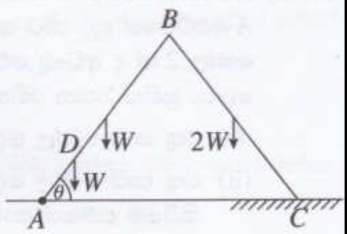
$$= 3\sqrt{3}Pa \quad 5$$

වාමාවර්තව $\curvearrowleft$ 5

$\boxed{15}$

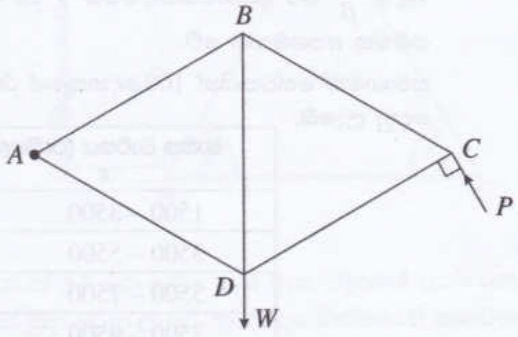
---

15. (*a*) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B අන්තයේදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬුවල බර පිළිවෙළින් W හා $2W$ වේ. A කෙළවර තිරස් ගෙබිමක් මත අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. $AD=\frac{a}{2}$ වන පරිදි AB දණ්ඩ මත වූ D ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ $B\hat{A}C=\theta$ ද BC දණ්ඩේ C කෙළවර ඉහත තිරස් ගෙබිමෙහි රළු කොටසක ද තිබෙන පරිදි ය. BC දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. $\cot\theta \le \frac{15}{7}\mu$ බව පෙන්වන්න.



CB මගින් AB මත B සන්ධියෙහි දී ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

(*b*) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර සිරස් තලයක BD සිරස්ව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට C සන්ධියෙහි දී CD දණ්ඩට ලම්බව රූපයෙහි පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි.

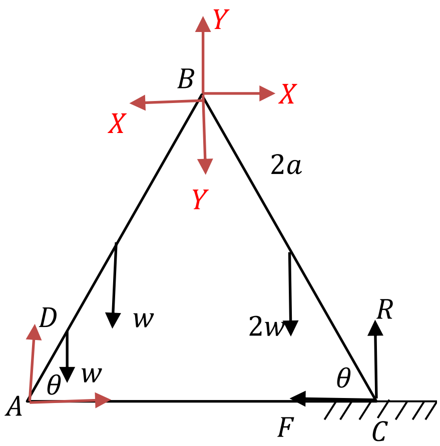


(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් ඒවා සොයන්න.

(a)



පද්ධතිය සඳහා;

A

$$R.4a\cos\theta - w\left(\frac{a}{2}\cos\theta + a\cos\theta\right) - 2w(2a\cos\theta + a\cos\theta) = 0$$ 15

$$\therefore 4R = \frac{3}{2}w + 6w$$

$$R = \frac{15}{8}w.$$ 5

BC සඳහා;

$$B\quad 2wa\cos\theta + F2a\sin\theta - R.2\,a\cos\theta = 0$$ 10

$$\therefore w + F\tan\theta = R$$

$\therefore F\tan\theta = \frac{15}{8}w - w.$

$\therefore F = \frac{7}{8}w\cot\theta.$ 5

සමතුලිතතාවය සඳහා,

$$\mu \geq \frac{F}{R}.$$

$$\frac{7}{8}w\cot\theta \leq \mu\frac{15}{8}w$$

$$\cot\theta \leq \frac{15}{7}\mu.$$ 5

45

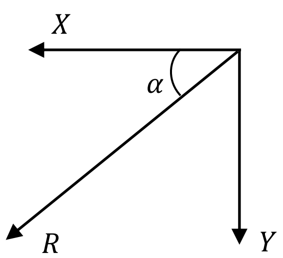
$\leftarrow \; BC: \quad X = F = \frac{7}{8}w\cot\theta$ 5

$\uparrow R + Y = 2w$ 5

$Y = 2w - R$

$= 2w - \frac{15}{8}w$

$= \frac{w}{8}$ 5



$R^2 = X^2 + Y^2$

$= \frac{49}{64}w^2 cot^2\theta + \frac{w^2}{64}$

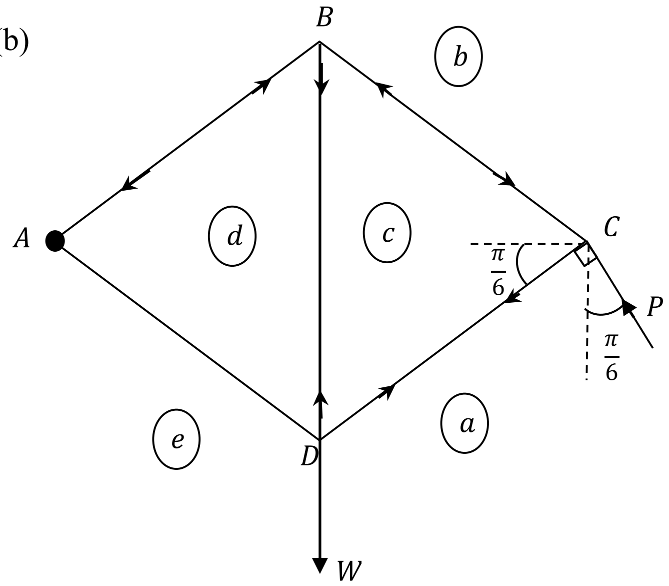
$R = \frac{w}{8}\sqrt{1 + 49\,cot^2\theta}$ 5

$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{w/8}{7w/8\,\cot\theta} = \frac{\tan\theta}{7}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{7}\right)$ 5

20

(b)

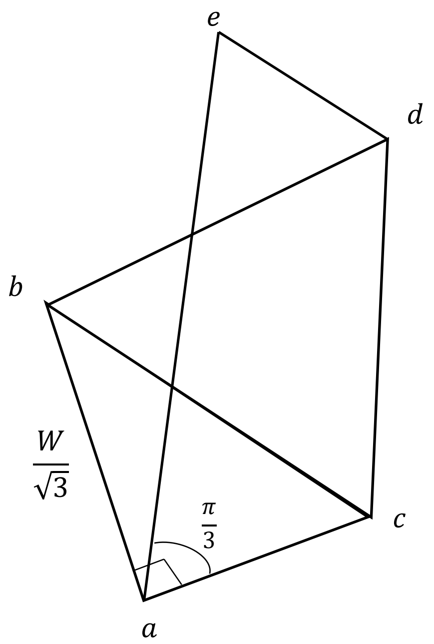


$A \curvearrowleft \quad P\cos\frac{\pi}{6}.2x - Wx = 0$ 5

(මෙහි $AC = 2x$)

$\therefore P = \frac{W}{\sqrt{3}}$ 5

10



10 + 10 + 10

සන්ධි එක එකක් සඳහා 10

30

දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB		$\frac{2W}{3}$
BC		$\frac{2W}{3}$
CD	$\frac{W}{3}$	
DA	$\frac{W}{3}$	
BD	$\frac{2W}{3}$	

විශාලත්වයට 5 බැගින්

ආතති/තෙරපුම් 15

5 ම නිවැරදි නම් 15

4 ක් පමණක් නිවැරදි නම් 10

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් 5

$\boxed{50}$

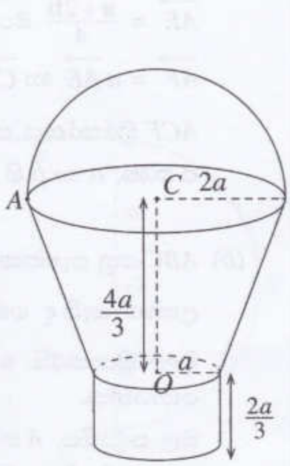
-----

16. (i) අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයෙන් යුත් තුනී ඒකාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද,

(ii) උස h වූ ඒකාකාර කුහර සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{1}{3}h$ දුරකින් ද,

පිහිටන බව පෙන්වන්න.

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් $2a$ හා a වූ ද උස $\dfrac{4a}{3}$ වූ ද කුහර සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලකට, පහත දැක්වෙන කොටස් එක එකක් මෙම කබොල හමුවන ස්ථානවලදී දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් බාල්දියක් සාදා ඇත.



- අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර තුනී වෘත්තාකාර තැටියක්,
- අරය a හා උස $\dfrac{2a}{3}$ වූ කුහර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලක්,
- අරය $2a$ හා කේන්ද්‍රය C වූ අර්ධ වෘත්තයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කම්බියක්

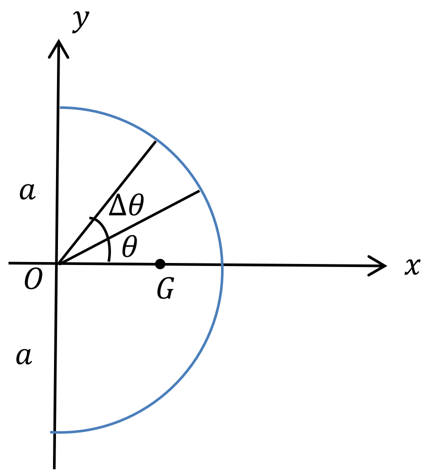
ඡින්නකයේ, තැටියේ හා සිලින්ඩරයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද කම්බියේ ඒකක දිගක ස්කන්ධය $11a\sigma$ ද වේ.

බාල්දියෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $(10\pi + 27)\dfrac{a}{9\pi}$ බව පෙන්වන්න.

කම්බිය, ඡින්නකයේ උඩත් ගැටිය හමුවන A ලක්ෂ්‍යයෙන් බාල්දිය සිරස් තන්තුවකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබූ විට සමතුලිත පිහිටීමේදී OC යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

(i)

අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බිය



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, මෙහි ρ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

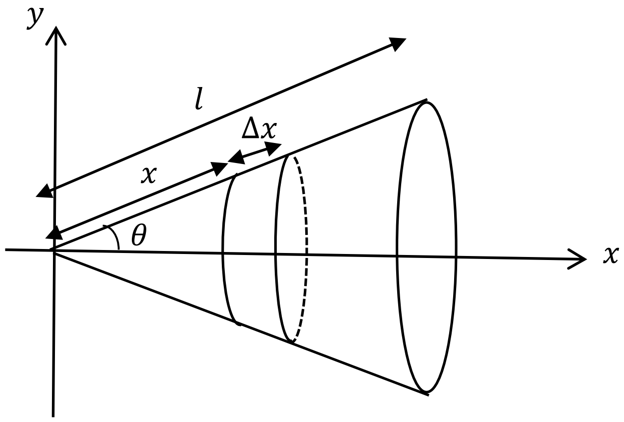
එවිට

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\, a\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\, d\theta} = \frac{a\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2a}{\pi}$$

5 5 5 5 5

30

(ii)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය G , x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$$h = l\cos\theta$$

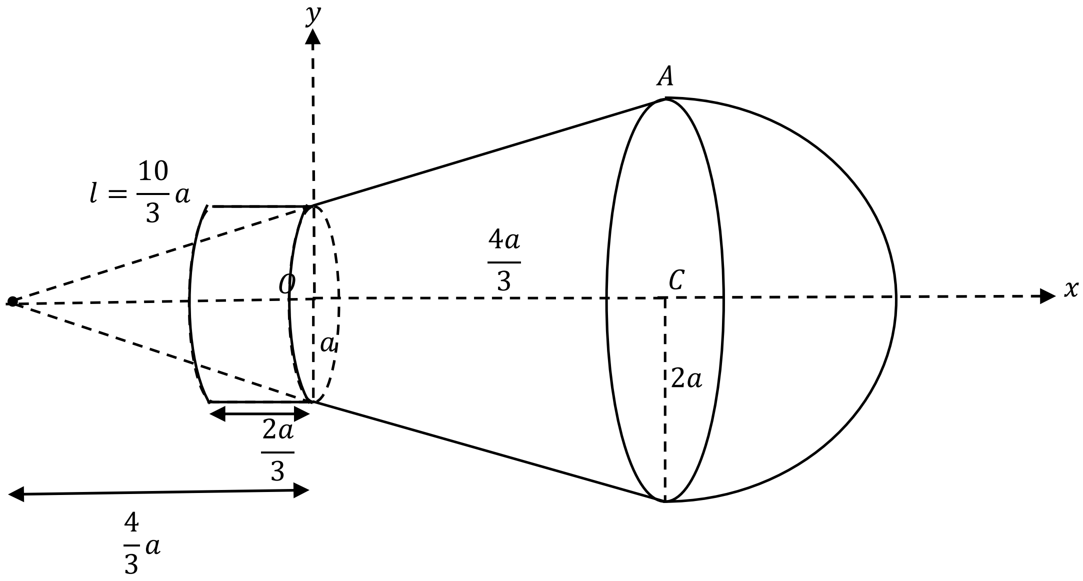
$\Delta m = 2\pi(x\sin\theta)\Delta x\sigma$, මෙහි σ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^l x\cos\theta\, 2\pi\sigma x\sin\theta\, dx}{\int_0^l 2\pi\sigma x\sin\theta\, dx} = \frac{\cos\theta \int_o^l x^2 dx}{\int_o^l x\, dx} = \frac{h/2\, \frac{x^3}{3}\Big|_0^l}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^l} = \frac{2h}{3}$$

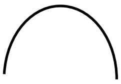
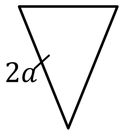
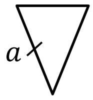
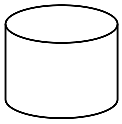
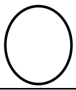
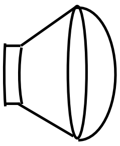
5 5 5 5 5

$\therefore$ අවශ්‍ය දුර $= \frac{h}{3}$.

30



y
A
$l = \frac{10}{3}a$
$\frac{4a}{3}$
O
C
x
a
$2a$
$\frac{2a}{3}$
$\frac{4}{3}a$

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර (↑)	
	$\pi(2a)(11a\sigma)$ $= 22\pi a^2\sigma$ 5	$\frac{4}{3}a + 2\frac{(2a)}{\pi} = \frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}$	5
	$\pi(2a)\left(\frac{10}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{20}{3}\pi a^2\sigma$ 5	$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}a\right) - \frac{4}{3}a\right] = \frac{4}{9}a$	5
	$\pi(a)\left(\frac{5}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$ 5	$-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = -\frac{4}{9}a$	5
	$2\pi a\left(\frac{2}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ 5	$-\frac{1}{3}a$	5
	$\pi a^2\sigma$	0	5
	$22\pi a^2\sigma + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma + \frac{5}{3}\pi a^2\sigma + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ $= \frac{88}{3}\pi a^2\sigma$ 5	$\bar{x}$	

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$$\frac{88}{3}\pi a^2\sigma\bar{x} = 22\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}\right) + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{9}a\right) - \frac{5}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{4}{9}a\right) + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{1}{3}a\right)$$

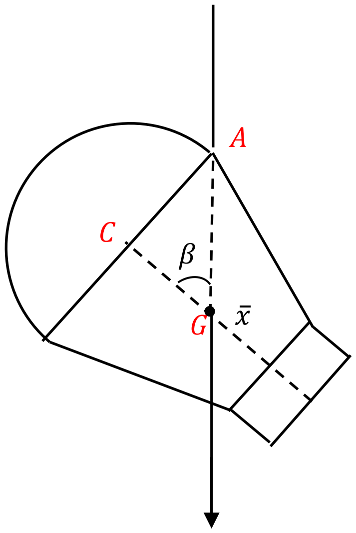
$$\frac{88}{3}\bar{x} = 4a\left(\frac{22}{3} + \frac{22}{\pi} + \underbrace{\frac{20}{27} + \frac{5}{27} - \frac{1}{9}}_{\frac{22}{27}}\right)$$ 15

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 22 \times 4a\left(\frac{10}{27} + \frac{22}{\pi}\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 88a\left(\frac{(10\pi + 27)}{27\pi}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{9\pi}(10\pi + 27) \quad 5$$

$\boxed{75}$



5

$$\tan\beta = \frac{AC}{CG} = \frac{2a}{\frac{4}{3}a - \bar{x}} \quad 5$$

$$= \frac{18\pi}{27 - 2\pi} \quad 5$$

$$\therefore \beta = \tan^{-1}\left(\frac{18\pi}{27 - 2\pi}\right)$$

$\boxed{15}$

---

17. (a) A හා B සර්වසම පෙට්ටි එක එකක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම බෝල 10 බැගින් අඩංගු වේ. A පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 6 ක් ද රතු පාට බෝල 4 ක් ද, B පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 8 ක් ද රතු පාට බෝල 2 ක් ද අඩංගු වේ. පෙට්ටියක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන, එම පෙට්ටියෙන් එකකට පසු අනෙක ලෙස, ප්‍රතිස්ථාපන රහිතව සසම්භාවී ලෙස බෝල 3 ක් ඉවතට ගනු ලබයි.

(i) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගැනීමේ

(ii) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගත් බව දී ඇති විට A පෙට්ටිය තෝරාගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $\bar{x}$ හා σ_x යනු පිළිවෙළින් $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ද $i = 1, 2, \dots, n$ සඳහා $y_i = \dfrac{x_i - \alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි α හා $\beta\ (>0)$ තාත්ත්වික නියත වේ. $\bar{y} = \dfrac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$ හා $\sigma_y = \dfrac{\sigma_x}{\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

සමාගමක සේවකයින් 100 දෙනකුගේ රක්ෂණ සැලැස්මක් සඳහා මාසික වාරික පහත සංඛ්‍යාත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

මාසික වාරිකය (රුපියල්) x	සේවකයින් ගණන
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

$y = \dfrac{x - 500}{1000}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, y හි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ද, $\dfrac{3\,(\text{මධ්‍යන්‍යය} - \text{මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන y හි කුටිකතා සංගුණකය ද නිමානය කරන්න.

ඒ නයින්, x හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය නිමානය කරන්න.

(a)

$W - 6$ $R - 4$	$W - 8$ $R - 2$
A	B

X යනු රතු බෝල දෙකක් හා එක් සුදු බෝලයක් ඉවතට ගැනීමේ සිද්ධිය යැයි ගනිමු.

(i) $P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)$ ____________ (1) 5

$P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}.$ 5

5 5 5

$$P(X|A) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} + \frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{10}.$$ 5

5 5 5

$$P(X|B) = \frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8} + \frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8} + \frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{15}.$$ 5

(1) මගින්,

$$P(X) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{60}$$ ලැබේ. 5

55

(ii)

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}$$ 5 [හෝ බේස් ප්‍රමේයය]

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{11}{60}}$$

$$= \frac{9}{11}$$ 5

10

(b)

$$y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad 5$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)$$

$$= \frac{1}{n\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i - n\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \alpha \right\}$$

$$= \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta}. \quad 5$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}{n} \quad 5$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \alpha}{\beta} - \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\beta^2}$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta} \quad 5 \quad (\because$$

20

---

5 5 5

පන්ති ප්‍රාන්තර x	f	පන්ති ප්‍රාන්තර y	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය y	fy	fy^2
1500-3500	30	1-3	2	60	120
3500-5500	40	3-5	4	160	640
5500-7500	20	5-7	6	120	720
7500-9500	10	7-9	8	80	640
				$\sum fy = 420$	$\sum fy^2 = 2120$

5 5

$$\bar{y} = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{420}{100} = 4.2$$ 5

5

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum fy^2}{\sum f} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{2120}{100} - 4.2^2}$$

$$= \sqrt{21.2 - 17.64}$$

$$= \sqrt{3.56} \approx 1.887$$

5

$M_y = y$ හි මධ්‍යස්ථය $= 50$ වැනි දත්තය

එවිට

$$M_y = 3 + \frac{(50-30)}{40}(5-3) = 4$$ 5

$\therefore$ කුටිකතා සංගුණකය $\quad y \approx \dfrac{3(4.2-4)}{\sqrt{3.56}} \approx 0.317$

5

50

$\overline{x} = 1000\overline{y} + 500$

$= 1000 \times 4.2 + 500$

$= 4700$ 5

$\sigma_x = 1000\ \sigma_y$

$\approx 1000 \times 1.887$

$= 1887$ 5

කුටි කතා සංගුණකය වෙනස් නොවේ..

$S_x = S_y \approx 0.317$ 5

$\boxed{15}$
