1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා ව: පැ: $=\frac{1}{2}$ හා ද: පැ: $=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}$. ....Enu.... (1) 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1}\frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad 5$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

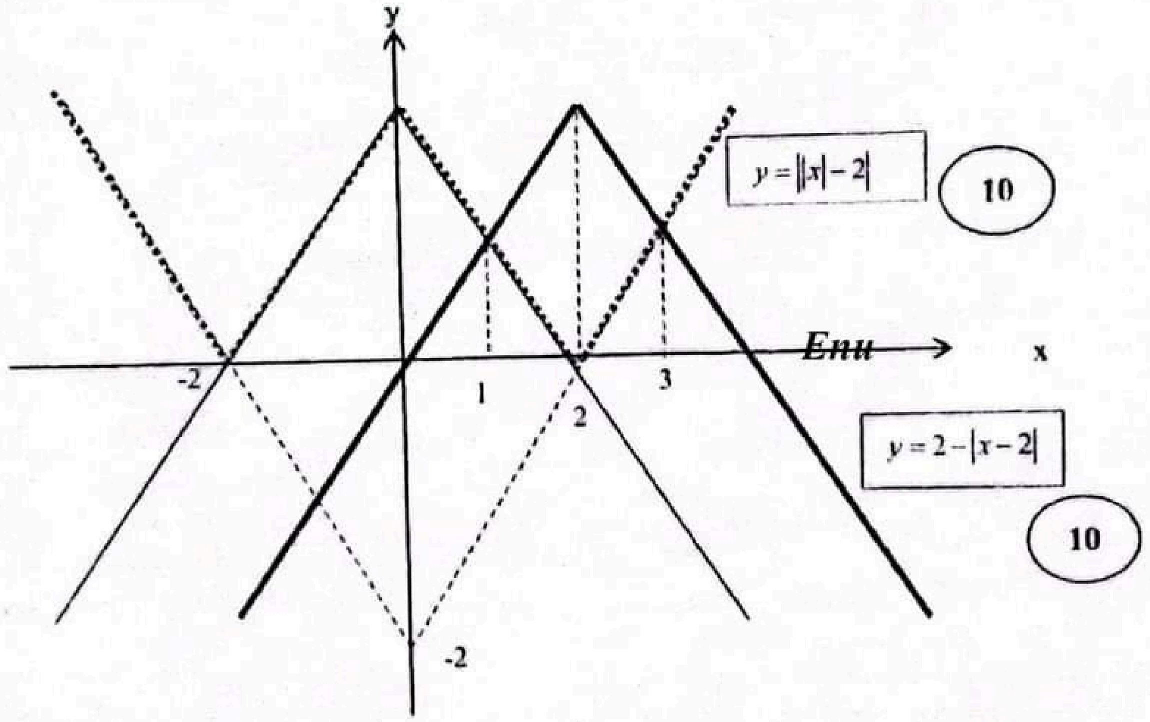
$$= \frac{k+1}{k+2} \quad 5$$

ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මඟින් $n \in \mathbb{Z}^+$. සඳහාම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

එකම රූප සටහනක $y = 2 - |x-2|$ හා $y = \left||x| - 2\right|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\left||x| - 2\right| + |x-2| \leq 2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.



$\left||x|-2\right| + |x-2| \leq 2$

$\Leftrightarrow \left||x|-2\right| \leq 2 - |x-2|$

ප්‍රස්තාරයෙන් $1 \leq x \leq 3$ බව ලැබේ. 5

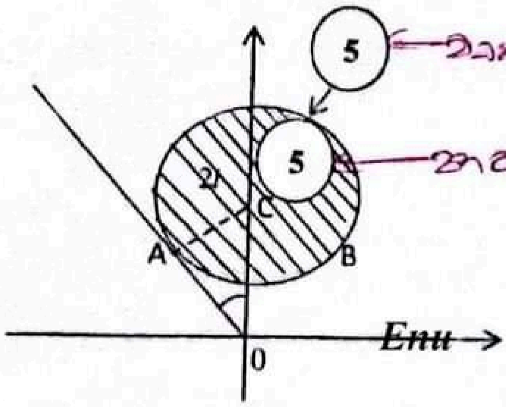
හෝ ප්‍රස්තාරයේ $x = 1$, $x = 3$ ලකුණු කර ඇත්නම් - 05
(වෙනම ලකුණු දෙනු ලැබේ)

25

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $|\bar{z} + 2i| \le 1$ යන අසමානතාව සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $\operatorname{Arg} z$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.

$|\bar{z}+2i| = |z-2i|$. 5

ඒ නයින් $|z-zi| \le 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙස දී ඇති පෙදෙසම වේ.



5 — වෘත්තය ඇඳීමට .

5 — පාට කිරීමට.

(වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය x අක්ෂයෙන් 2ක් y අක්ෂය මත තිබිය යුතුය.)

A මගින් නිරූපනය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_0 යැයි ගනිමු.

* වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ නොවිය යුතුය

ΔOAC මගින් $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ ලැබේ. 5

$\operatorname{Arg} z$ හි අවශ්‍ය වැඩිතම අගය $= \operatorname{Arg} z_0$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$ 5

පලමුවන 5 සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

$z = x + iy$, යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

Then $|\bar{z}+2i|^2 = |x-(y-z)i|^2$

$$= x^2 + (y-2)^2$$ 5

ඒ නයින්, දී ඇති පෙදෙස $x^2 + (y-2)^2 \le 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙසම වේ

25

$a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් x^2 පදය දක්වා එය ද ඇතුළුව $(2+ax)^5$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.
එනයින්, $(4-5x)(2+ax)^5$ ප්‍රසාරණයේ x^2 හි සංගුණකය -80 වන a හි අගයන් සොයන්න.

අවශ්‍ය ප්‍රකාශනය $= {}^5C_0 2^5 + {}^5C_1 2^4 (ax) + {}^5C_2 2^3 (ax)^2$ 5

$= 32 + 5 \times 16ax + 10 \times 8a^2x^2$ 5

$= 32 + 80ax + 80a^2x^2$

$(4-5x)(2+ax)^5 = 4(2+ax)^5 - 5x(2+ax)^5$

x^2 සංගුණකය $= 4 \times 80a^2 - 5 \times 80a$ 5

$4 \times 80a^2 - 5 \times 80a = -80$, බව දී ඇත. 05

$\therefore \ 4a^2 - 5a + 1 = 0.$

$\therefore \ (4a-1)(a-1) = 0.$

$\therefore \ a = \frac{1}{4} \ or \ a = 1.$ 5

25

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}} = \dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left((1+x)\operatorname{cosec}2x - \cot 2x\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)} \qquad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{(1+2x)}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)} \qquad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\left(2\sin^2 x + x\right)}{\left[(1+2x)-(1-2x)\right]} \cdot \left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \left(\frac{2\sin^2 x}{4x} + \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right) \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 \qquad 10$$

$$= \frac{1}{4}.$$

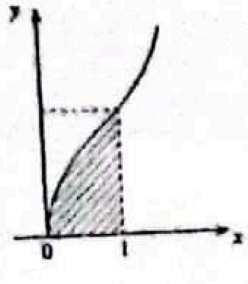
(සතර 05)

සීමාවන් තුනම නිවැරදි නම්	10
ඕනෑම දෙකක්	5

25

6. $\dfrac{d}{dx}\left\{x(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$ භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.

$y = \sqrt{2(3x^2+1)\tan^{-1}x}$, $x = 1$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙස x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙමගින් ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\pi(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.



$\dfrac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$ භාවිතයෙන්

5

$\int_0^1\left[(3x^2+1)\tan^{-1}x + x\right]dx = x(x^2+1)\tan^{-1}x\Big|_0^1$ බව ලැබේ.

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 2\tan^{-1}1$

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\dfrac{\pi}{4}$ 5

$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(\pi-1).$ 5

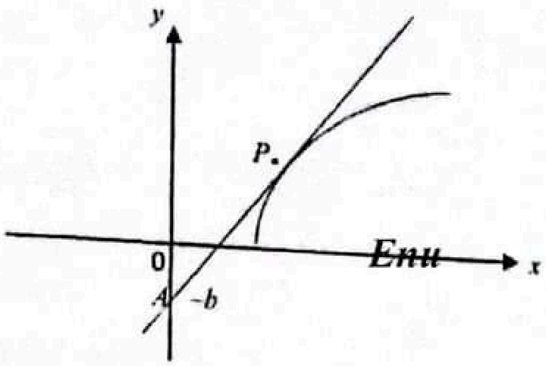
අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\int_0^1 2\left(3x^2+1\right)\tan^{-1}x\,dx$ 5 $\pi\int_0^1 y^2\,dx$ — 05

$= 2\pi\dfrac{1}{2}(\pi-1)$ 5

$= \pi(\pi-1).$

25

7. $a, b > 0$ යැයි ගනිමු. වක්‍රයක් $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = a\sec\theta$ හා $y = b\tan\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. වක්‍රයට $P \equiv (a\sec\theta, b\tan\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාව, $(0, -b)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$x = a\sec\theta, \qquad y = b\tan\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta, \quad \dfrac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$ 5

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}$ 5

$\therefore \quad = \dfrac{b\sec\theta}{a\tan\theta}.$

AP හි අනුක්‍රමණය $= \dfrac{b + b\tan\theta}{a\sec\theta}.$

දී ඇති තත්වයට මගින් $\dfrac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \dfrac{b(1+\tan\theta)}{a\sec\theta}$ ලැබේ. 5

$\therefore \ \sec^2\theta = \tan\theta + \tan^2\theta$

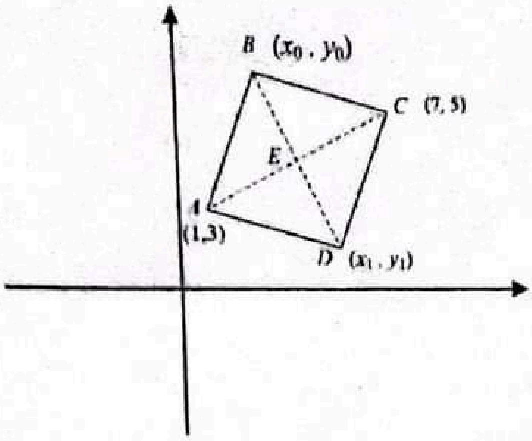
$\therefore \ \tan\theta = 1$ 5

$\therefore \ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \ P \equiv \left(\sqrt{2}a,\ b\right)$ 5

25

$ABCD$ යනු $A \equiv (1, 3)$ හා $C \equiv (7, 5)$ වන සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. B හා D හි x-ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$B = (x_0, y_0)$ හා $D = (x_1, y_1)$ යැයි ගනිමු.

E යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බැවින්, $E \equiv (4,4)$ ලැබේ. 5

එවිට, $AE^2 = 3^2+1^2 = 10$

$ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් නිසා $BE = AE$ වේ.

ඒ නයින්, $(x_0-4)^2+(y_0-4)^2=10.$ ---------------- (1) 5

තවද, $AE \perp BE$. වේ.

$$\therefore \left(\frac{4-3}{4-1}\right)\times\left(\frac{y_0-4}{x_0-4}\right)=-1.$$

ඒ නයින්, $y_0-4=-3(x_0-4)$ ------------ (2) 5

(1) සහ (2) $\Rightarrow (x_0-4)^2+9(x_0-4)^2=10.$ 5

ඒ නයින්, $y_0-4=-3(x_0-4).$

$\therefore\ (x_0-4)^2=1.$

$\therefore\ (x_0-4)=\pm 1.$

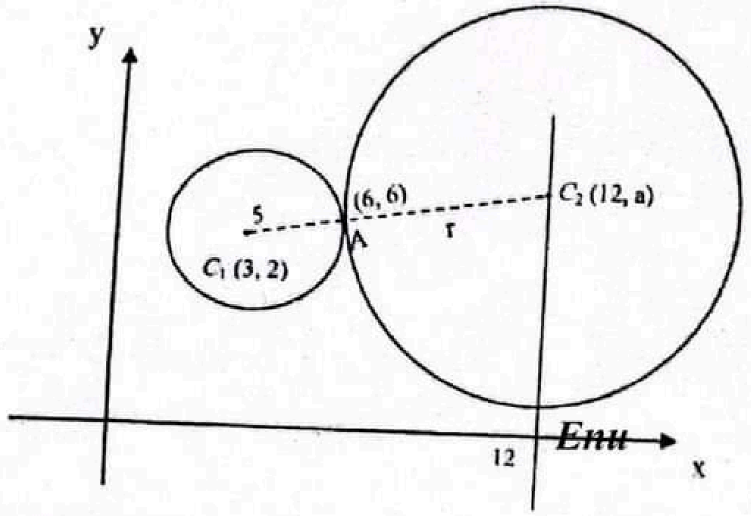
$\therefore\ x_0=5$ or $x_0=3.$ 5

(x_1, y_1) ද (1) සහ (2) හි (x_0, y_0) යන්න (x_1, y_1) මගින්

ඒ නයින් B හා D හි X-ඛණ්ඩාංකය 3 හා 5 වේ. තෘප්ත කරයි.

25

9. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ වෘත්තය (6, 6) ලක්ෂ්‍යයෙහිදී බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා $x = 12$ රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.



දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_1 හා අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_2 යැයි ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (3,2)$, $C_2 \equiv (12,a)$; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ 5

C_2 වෘත්ත බාහිරව ස්පර්ශ කරන බැවින් C_2 ලක්ෂ්‍යය C_1A රේඛාව මත පිහිටයි.

$\therefore \dfrac{6-2}{6-3} = \dfrac{a-6}{12-6}.$ 5

$\therefore 3a - 18 = 24.$

$\therefore a = 14.$ 5

$S(6,6) = 0$

([illegible])

අවශ්‍ය වෘත්තයේ අරය $C_2 = \sqrt{(12-6)^2 + (14-6)^2}$ 5

$= 10$

ඒ නයින්, අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-12)^2 + (y-14)^2 = 100$ වේ. 5

$r_2 = 10$, $C_2 = (\overset{+9}{12}, \overset{+f}{14})$

$10 = \sqrt{12^2 + 14^2 - c}$

$c = 260$

25

වෘත්තයේ සමී: ය $\Rightarrow x^2 + y^2 - 24x - 28y + 260 = 0$

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$ වන්නේ $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta = \frac{n\pi}{4}$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$\in \mathbb{Z}$ හා $\theta \neq \frac{n\pi}{4}$ සඳහා $\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot 4\theta$ බව ද පෙන්වන්න.

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$

$\Leftrightarrow \quad 5\theta = 2n\pi \pm 3\theta$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$\Leftrightarrow \quad 8\theta = 2n\pi$ or $2\theta = 2n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ or $\theta = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$$\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \frac{2\cos 4\theta \sin\theta}{-2\sin 4\theta \sin\theta}$$ 5 5

$$= -\cot 4\theta$$ 5

$\cos 5\theta - \cos 3\theta = 0$

$-2\sin 4\theta \cdot \sin\theta = 0$

$\sin 4\theta = 0$

$\sin 4\theta = \sin 2\pi$

$4\theta = n\pi + (-1)^n$

$\theta = \frac{n\pi}{4}$

$\sin\theta = 0$

$\sin\theta = \sin\pi$

$\theta = n\pi + (-1)$

$\theta = n\pi$

25

B කොටස

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.(a) $0 < |p| < 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න.
මෙම මූල α හා β $(> \alpha)$ යැයි ගනිමු. α හා β යන දෙකම ධන වන බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ සොයා, $\alpha < 1$ හා $\beta > 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ බව පෙන්වන්න.
$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ බව **දී** ඇත. $|\sqrt{\alpha}-1|$ හා $|\sqrt{\beta}-1|$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය
$|p|x^2 - \sqrt{2(1-|p|)}.x + \sqrt{2(1+|p|)} - |p| - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x + 2)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් බව දී ඇත; මෙහි $p'(x)$ යනු x විෂයයෙන් $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.
a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $p(x) - 3p'(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(a)

$0 < |p| < 1.$

$p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ හි නිශ්චායකය Δ යැයි ගනිමු.

$p^2 < 1$ නිසා $\Delta = 4 - 4p^2 = 4(1 - p^2) > 0$

5 5

$\therefore$ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්වික මූල ඇත 5

$\boxed{15}$

α හා β $(> \alpha)$ මෙම මූල යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha\beta = \frac{1}{p^2} > 0.$ 5

($\alpha+\beta$) හා $\alpha\beta$ ලියා ඇත්නම් (05)

α හා β යන දෙකම ධන හෝ දෙකම ඍණ වේ.

නමුත් $\alpha + \beta = \frac{2}{p^2} > 0$ නිසා α හා β යන දෙකම ධන වේ. 5

5

$\boxed{15}$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} + 1 = \frac{p^2 - 1}{p^2} < 0$ හා $\alpha - 1 < \beta - 1.$

5 5 5

$\therefore \alpha - 1 < 0$ හා $\beta - 1 > 0.$ 5

$\therefore$ $\alpha < 1$ හා $\beta > 1.$

$\boxed{20}$

$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{2}{p^2}-2\dfrac{1}{|p|}=\dfrac{2}{p^2}(1-|p|).$

5 (ප්‍රසාරණයට) 5 (ආදේශයට)

$\therefore \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ 5

$\boxed{15}$

අවශ්‍ය සමීකරණය $\left(x-\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\right)\left(x-\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)=0$ වේ. 10

$x^2-\left(\left|\sqrt{\alpha}-1\right|+\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)x+\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\left|\sqrt{\beta}-1\right|=0$

$\left|\sqrt{\alpha}-1\right|=1-\sqrt{\alpha}$ හා $\left|\sqrt{\beta}-1\right|=\sqrt{\beta}-1$ නිසා,

$x^2-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha\beta}-1=0$ 5

$\therefore\ x^2-\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}\,x+\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|}-\dfrac{1}{|p|}-1=0$

$\therefore |p|x^2-\sqrt{2(1-|p|}\,x+\sqrt{2(1+|p|}-|p|-1=0$ 5

$\boxed{20}$

(b) $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$

$\therefore p'(x)=6x^2+2ax+b.$ 5

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p(-2)=0$ වේ. 5

දැන්, $p(-2)=-16+4a-2b-4=0.$ 5

$\therefore\ 2a-b=10$ ---------------- (1)

$(x+2)$ යන්න, $p'(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p'(-2)=0.$ 5

දැන්, $p'(-2)=24-4a+b=0.$ 5

$\therefore 4a-b=24.$ ---------------- (2)

(1) හා (2) $\Rightarrow a = 7$ හා $b = 4$.

5 5

35

$$p(x) - 3p'(x) = (2x^3 + 7x^2 + 4x - 4) - 3(6x^2 + 14x + 4)$$ 5

$$= (x+2)(2x^2 + 3x - 2) - 3(x+2)(6x+2)$$ 5

$$= (x+2)\left[2x^2 + 3x - 2 - 18x - 6\right]$$

$$= (x+2)\ (2x^2 - 15x - 8)$$ 5

$$= (x+2)(2x+1)(x-8)$$

5 5 5

30

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$$

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් වන නිසා

$p(x) = (x+2)^2(2x+k)$. 5 මෙහි k නියතයකි.

10

නියත පද සංසන්දනය කිරීමෙන් $4k = -4$

$\therefore k = -1$ 5

$\therefore p(x) = (x+2)^2(2x-1)$.

$\therefore p(x) = (x^2 + 4x + 4)(2x - 1) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$. 5

x හි බලවල සංගුණක සංසන්දනය කිරීමෙන් $b = 4$ හා $a = 7$.

5 5

35

$\therefore p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

$\therefore p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 2(3x^2 + 7x + 2) = 2(x+2)(3x+1)$ 5

$\therefore p(x) - 3p'(x) = (x+2)^2(2x-1) - 3(2(x+2)(3x+1))$ 5

$= (x+2)[(x+2)(2x-1) - 6(3x+1)]$

$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8)$ 5

$= (x+2)(2x+1)(x-8)$ 5

5 5

30

12.(*a*) අවම වශයෙන් එක් සිසුවෙකුට එක් පලතුරක්වත් ලැබෙන පරිදි, අඹ ගෙඩි හයක් හා දොඩම් ගෙඩි හතරක් සිසුන් අට දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) සිසුන් හය දෙනෙකුට එක් පලතුරක් බැගින් හා ඉතිරි දෙදෙනාගෙන් එක් අයෙකුට අඹ ගෙඩි දෙකක් හා අනිත් කෙනාට දොඩම් ගෙඩි දෙකක්,

(ii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට අඹ ගෙඩි තුනක්,

(iii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට පලතුරු තුනක්,

ලැබෙන පරිදි වූ වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ යැයි ගනිමු. තවද, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{A}{(2r+1)} + \dfrac{B}{(2r+3)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B යනු තාත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+5}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\sum^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$ වන පරිදි k තාත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

(*a*) (i)

සිසුන් දෙදෙනක්		සිසුන් හයදෙනෙක්
2M 2OR		4M 2OR
$^8C_2$	x	$^6C_4 \times {^2C_2}$
2OR 2M		4M 2OR
$^8C_2$	x	$^6C_4 \times {^2C_2}$

5   5

පිළිතුර : $2 \times {^8C_2} \times {^6C_4} \times {^2C_2}$ 5

$$= 2 \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = 2 \times 28 \times 15 = 840$$ 5

5

25

(ii) එක් සිසුවෙක් | සිසුන් හත්දෙනෙක්

3M | 3M 4OR

$^8C_1$ x $^7C_3 \times {}^4C_4$

පිළිතුර: $^8C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4 = 8 \times 4\frac{7!}{4!3!} = 8 \times 35 = 280$ 5 5 5

$\boxed{15}$

(iii) පළතුරු 3ක්: 3M + 3OR 2M + 1OR 1M + 2OR 5

අවස්ථා 4 ක්

3M (ii) හි පරිදි විධි 280 යි

3OR $^8c_1 \times {}^7c_6 \times {}^1c_1 = 8 \times 7 = 56$ 5

2M + 1OR $^8c_1 \times {}^7c_4 \times {}^3c_3 = 8 \times 35 = 280$ 5

1M + 2OR $^8c_1 \times {}^7c_5 \times {}^2c_2 = 8 \times 21 = 168$ 5

^nC_r ප්‍රකාශය වෙනම ලියා ඇත්නම් - 05

පිළිතුර $= 280 + 56 + 280 + 168$

$= 784$ 5 $\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

(a) අඹ 6 යි. දොඩම් 4යි. සිසුන් 8යි.

(i) එක් සිසුවෙකුට අඹ දෙකකුත් තවත් සිසුවෙකුට දොඩම් දෙකකුත් දෙන නිසා ඉතිරි සිසුන් 6 දෙනාට අඹ හතරකුත් දෙඩම් දෙකකුත් ඉතිරිව ඇත.

						2Ma	2Or

සිසුන් 6

සිසුන් 6 දෙනෙකු අතර අඹ 4ක් හා දොඩම් 2ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$= \frac{6!}{4!2!}$ 10

$^6C_2 \to 05$

$\frac{6!}{4!2!} \to 05$

සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^{8}C_1$

5 සිසුන් 7 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා දොඩම් 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^{7}C_1$

පිළිතුර $= \dfrac{6!}{4!2!} \times {}^{8}C_1 \times {}^{7}C_1$ 5

$= 840$ 5

හෝ

$= \dfrac{6!}{4!2!} \times {}^{8}P_2$

$= 840$

25

(ii) එක් සිසුවෙකුට අඹ 3කුත් අනෙක් සිසුන් 7 දෙනාට එක පළතුර බැගිනුත්:

							3Ma

සිසුන් 7 දෙනෙකු අතර අඹ 3ක් හා දොඩම් 4ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$= \dfrac{7!}{4!3!}$

සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 3ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^{8}C_1$

$\therefore$ පිළිතුර $= {}^{8}C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!}$

$= 280$

(iii)

පළතුරු 3 ක් එක් සිසුවෙකුට		පළතුරු 7 ක් සිසුන් 7 දෙනාට		විධි ගණන	
අඹ	දොඩම්	අඹ	දොඩම්		
3	0	3	4	$= {}^{8}C_1 \times \dfrac{7!}{3!4!} = 280$	5
2	1	4	3	$= {}^{8}C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!} = 280$	5
1	2	5	2	$= {}^{8}C_1 \times \dfrac{7!}{5!2!} = 168$	5
0	3	6	1	$= {}^{8}C_1 \times \dfrac{7!}{6!} = 56$	5

මුළු විධි ගණන

$= 280 + 280 + 168 + 56$

$= 784$ 5

25

(*b*). $r \in \mathbb{Z}^+$

$$U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

$$U_r \quad = \quad f(r) \quad - \quad f(r+1)$$

$$\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \frac{A}{2r+1} + \frac{B}{2r+3} - \frac{A}{2r+3} - \frac{B}{2r+5} \quad 5$$

$$\therefore 4(2r+7) = A(2r+3)(2r+5) + (B-A)(2r+1)(2r+5) - B(2r+1)(2r+3)$$

$$= (4A+4B)r + 10A + 2B$$

ඕනෑම ක්‍රමයක් 10

r :හි බල සංසන්දනය කිරීමෙන්

$$\left.\begin{array}{ll} r: & 8 = 4A+4B \Rightarrow 2 = A+B \\ r^0: & 28 = 10A+2B \Rightarrow 14 = 5A+B \end{array}\right\} A = 3, \quad B = -1 \quad 5 \quad 5$$

25

$U_r = f(r) - f(r+1)$ මෙහි $f(r) = \dfrac{3}{2r+1} - \dfrac{1}{2r+3}$ 5

$r = 1;\ U_1 = f(1) - f(2)$

5

$r = 2;\ U_2 = f(2) - f(3)$

A සහ B ඇරිය නම, ඵලය ලැබුව 25

. .

. .

. .

$r = n-1;\ U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r = n;\quad U_n = f(n) - f(n+1)$ 5

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad 5$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

5 ආදේශනය

$$= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \quad 5 \quad r \in \mathbb{Z}$$

අනවශ්‍යයි X

30

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r \quad (5)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right)$$

5

$$= \frac{4}{5} \quad (5)$$

$\therefore$ මෙම $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ යන අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{4}{5}$ වේ.

$\boxed{15}$

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1})$$

$$= (1+k)\left(\sum_{r=1}^{\infty} U_r\right) - kU_1 \quad (5)$$

$$= (1+k)\left(\frac{4}{5}\right) - k\left(\frac{12}{35}\right) \quad (5)$$

$$\therefore k = \frac{7}{16} \quad (5)$$

$\boxed{15}$

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතින බව පෙන්වන්න.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ හා $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ තවද $A = PQ^T + R$ වන පරිදි වේ. $a = 1$ බව පෙන්වන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, A^{-1} ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ වන පරිදි x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වා ඒ නයින්, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ බව අපෝහනය කර, ආගන්ඩ් සටහනේ, z, w හා 0 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන විට, ඒ සඳහා ජ්‍යාමිතික අර්ථ නිරූපණයක් දෙන්න.

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ යැයි ගනිමු. z යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ වේ.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $z^n = a_n + ib_n$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ වේ. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(z^m \cdot z^n\right)$ යන්න a_m, a_n, b_m හා b_n ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

z^{m+n} සලකමින් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(a) සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $|A| = a(a+2) + 2 = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \neq 0.$ 5

05

$\therefore$ සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතී. 5

15

$$A = PQ^T + R \quad 5$$

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 5$$

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5$$

$a = 1$ හා $a + 2 = 3.$ $\quad \therefore a = 1$ 5

25

$a = 1$ විට $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a ... ms 05

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ 10

05 05

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 10 (on error)

5 5

on. error ✗

$x = 1$ හා $y = 3$ වේ.

30

(*b*) $x y \in \mathbb{R}$ සඳහා $z = x + iy$ ලෙස ගනිමින්

$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

5 5

10

$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$ 5

$= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$ 5

$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w}$ 5

$= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$

5

$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$ ---------------- (i)

20

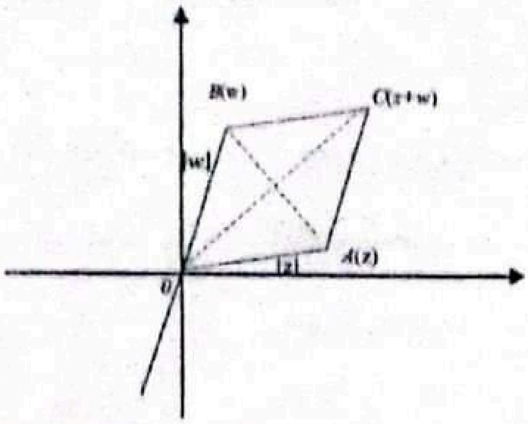
(i) හි w යන්න $-w$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්

5

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$ ---------------- (ii)

$\therefore$ (i) හා (ii) න්

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$ 5



z, w හා 0 ඒක රේඛීය නොවේනම් එවිට $OC^2 + AB^2 = 2\left(OA^2 + OB^2\right)$.

$\left(\because OC = |z+w|\right.$ හා $\left.AB = |z+w|.\right)$

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණයන්හි වර්ගවල එකතුව එහි පාදවල වර්ගවල එකතුවට සමාන වේ.

5 $\boxed{15}$

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ 10

5

මෙහි $r = 2$ හා $\theta = \frac{2\pi}{3}$ වේ. $\boxed{15}$

5

$\text{Re}(z^m z^n) = \text{Re}\left[(a_m + ib_m)(a_n + ib_n)\right] = a_m a_n - b_m b_n$ -------- (1) $\boxed{05}$

---

5 5

$z^m z^n = z^{m+n} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{n+m} = 2^{m+n}\left[\cos\frac{2(m+n)\pi}{3} + i\sin\frac{2(m+n)\pi}{3}\right]$

$\therefore \text{Re}(z^m z^n) = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ ------------------ (2)

5

(1) හා (2) $\Rightarrow a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$. $\boxed{15}$

14.(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq -2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

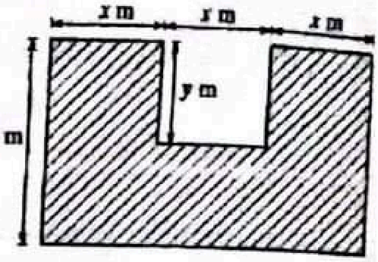
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq -2$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$[k, \infty)$ මත $f(x)$ එකට-එක වන k හි කුඩාතම අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය 45 m^2 වේ. එය ලබාගෙන ඇත්තේ දිග $3x$ m හා පළල $2y$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග x m හා පළල y m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් ඉවත් කිරීමෙනි. අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි පරිමිතිය L m යන්න $x > 0$ සඳහා $L = 6x + \dfrac{54}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. L අවම වන x හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2(2) - 2(2x+3)(x+2)}{(x+2)^4} \quad 20$$

$$= \frac{2(x+2)\left[x+2-2x-3\right]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3} \quad 5$$

$\boxed{25}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ 5

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$f(x)$	අඩු වේ ↘	වැඩි වේ ↗	අඩු වේ ↘
	5	5	

$\therefore$ $(-2, -1]$ මත $f(x)$ වැඩි වේ. හා

$\therefore$ $(-\infty, -2)$ මත $[-1, \infty)$ $f(x)$ අඩු වේ.

$\boxed{20}$

හැරවුම් ලක්ෂය: $(-1,1)$ ස්ථානීය උපරියක් වේ 5 5

(ප්‍රස්තාරයේ ලකුණු කර ඇත්නම්) 10

$$f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$$

$f''(x)=0 \iff x=\frac{-1}{2}.$ 5

	$-2<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
	යටි අවතල	උඩු අවතල

5 5

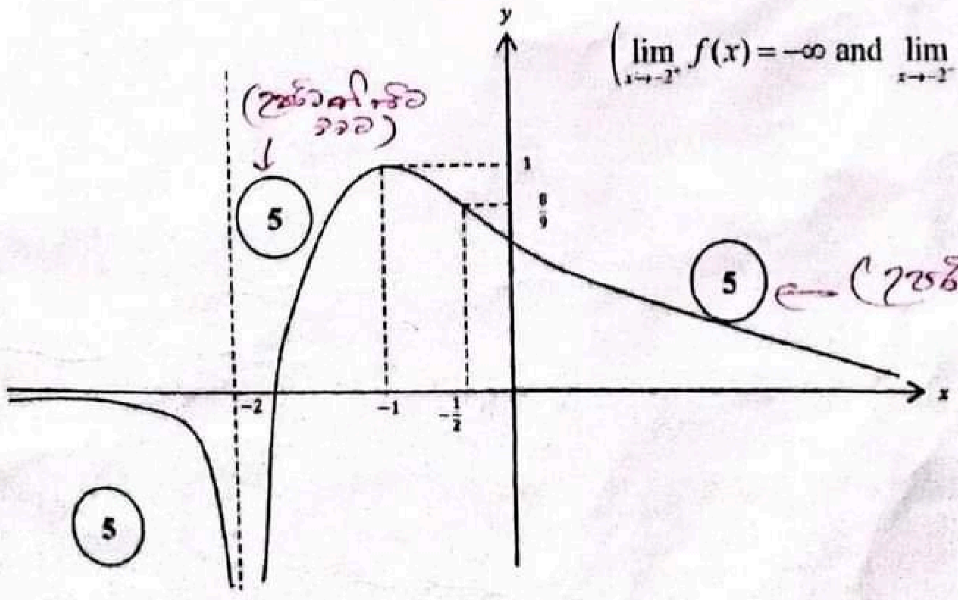
$\therefore \left(\frac{-1}{2},\frac{8}{9}\right)$ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය වේ 5

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \qquad \therefore y=0$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x=-2$ 5

ප්‍රස්තාරයේ ලකුණු කර ඇත්නම් 05 05

$\left(\lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty \text{ and } \lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty\right)$

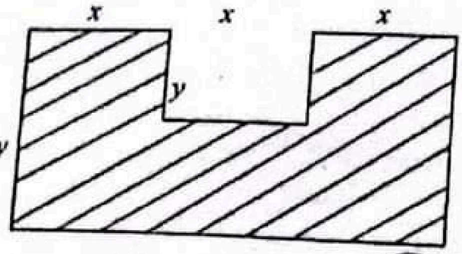


55

k හි කුඩාතම අගය $k = -1$ වේ. 5

05

(b)



for $x > 0, \quad y > 0$

5 5

අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $45 = (3x)(2y) - xy$

$$\therefore \quad 45 = 5xy$$

$$\therefore \quad y = \frac{9}{x}$$ 5

$L = 6x + 6y$ 10

$= 6x + \frac{54}{x} \quad$ for $x > 0$ 5

$$\frac{dL}{dx} = 6 - \frac{54}{x^2} = \frac{6(x^2-9)}{x^2} = \frac{6(x-3)(x+3)}{x^2}$$ 5

$\frac{dL}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ 5

$0 < x < 3$ සඳහා $\frac{dL}{dx} < 0$ හා

$x > 3$ සඳහා $\frac{dL}{dx} > 0$ වේ

$\therefore x = 3$ විට L අවම වේ. 5

45

15.(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා, $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx$ සොයන්න.

(b) $1 + \sin 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ බව පෙන්වා, ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = 1$ බව පෙන්වන්න.

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $I = -\frac{\pi^2}{8} + J$ බව

පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

$\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$ යන සම්බන්ධය හා (b) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් J හි අගය ගණනය කර $I = \frac{\pi}{8}(2-\pi)$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$$x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (A + B + C)x + A + C$$

x හි බලවල සංගුණක සංසන්දනය කිරීමෙන්

$x^0: \quad z = A + C$

$x: \quad 1 = A + B + C$ 5

$x^2: \quad 1 = A + B$

$\therefore A = 2, \quad B = -1 \quad and \quad C = 0.$ 5

5 5

20

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}$$ 5

$$\therefore \int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}dx = 2\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx$$ 5

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$ 5 5 5

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$ 5 5 5

$x^2+x+1>0$

$|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C$, මෙහි C නියතයකි

an Error (45)
72, 05

$\boxed{40}$

(*b*)

$$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x) = 2(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x)^2$$

$$=(\cos x + \sin x)^2$$ 5

$$= 1 + 2\sin x\cos x$$ 5

$$= 1 + \sin 2x$$ 5

$\boxed{15}$

$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)$
$2\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right]^2$
$2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]^2$
$\frac{2}{2}\left[\cos x + \sin x\right]^2$
$\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x$
$1+\sin 2x$

$1+\sin 2x = 2\cos^2(\ldots$

R.H.S $= 2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)$
$= 1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-x)$
$= 1+\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$
$= 1+\sin 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx$$ 5

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$$ 5

$$= \frac{-1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$ 5

$$= \frac{-1}{2}\left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}\right)$$ 5

$1+\sin 2x$
$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin\ldots$
$(\sin x + \cos x)^2$
$2(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)^2$
$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)$

$$= \frac{-1}{2}(-1-1)$$

$$= 1 \quad 5$$

25

(C) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{1+\sin 2x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx \quad 5$$

5 5

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{1+0} \; 5 \; + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + J. \quad 5$$

25

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\underbrace{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin 2x}}\,dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x}{1+\sin 2x}}_{J}\,dx \quad 5$$

$$\therefore 2J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{1+\sin 2x}}_{1}\,dx \quad 5$$

(2J)

$$\therefore J = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(2-\pi) \quad 5$$

25

---

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ හා l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. P සිට l ට ඇති ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

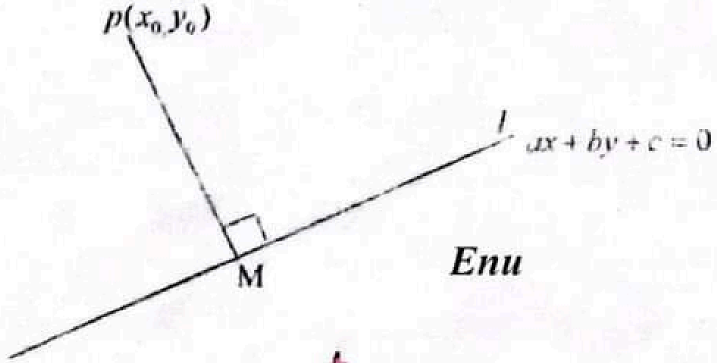
l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින්, $4x-3y+8=0$ හා $3x-4y+13=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

l_1 හා l_2, $A \equiv (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ පරාමිතික සමීකරණ $x=t$ හා $y=t+3$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

ඒ නයින්, l_1 හා l_2 සරල රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරන, l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය අඩංගු වන පෙදෙසෙහි පවතින ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $(x-t)^2+(y-t-3)^2=\frac{1}{25}(t-1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ හා $t \neq 1$.

ඉහත වෘත්ත අතුරින්, කේන්ද්‍රය A වන හා අරය 1 වන වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.



Here $a^2+b^2 \neq 0$

$\frac{b}{a}$

PM හි සමීකරණය $(y-y_0)=\frac{a}{b}(x-x_0)$ වේ 5

P හරහා l ට ලම්බ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂයක්

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා (x_0+at, y_0+bt) ලෙස ලිවිය හැකිය. 5

M, l මත පිහිටයි $\quad a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$ 5

$$\therefore t(a^2+b^2)=-ax_0+by_0+c$$

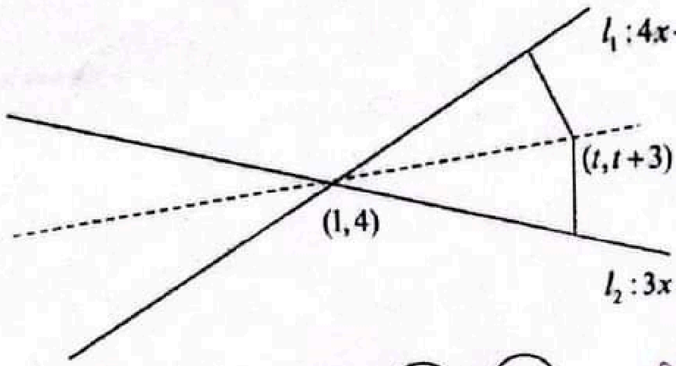
$$\therefore \quad t=\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය දුර $PM = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}$ 5

$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t|$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 5

$\boxed{30}$



l_1 සත්‍යාපනය කිරීමට 5 5 ← l_2 සත්‍යාපනය කිරීමට

A හි ඛණ්ඩාංක l_1, සහ l_2 හි ආදේශයෙන් අපට l_1, සහ l_2 රේඛා $A = (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වේ. 5

$\boxed{15}$

$\dfrac{4x - 3y + 8}{5} = \pm\dfrac{3x - 4y + 13}{5}$ මඟින් කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ දෙනු ලබයි. 10 සූත්‍රය ලිවීම -(5) ආදේශයට -(5)

කෝණවල සමච්ඡේදක $\underbrace{x + y - 5}_{m=-1} = 0$ සහ $x - y + 3 = 0$ වේ.

5 5

θ යනු l_1 සහ $x_1 + y - 5 = 0$ අතර සුළු කෝණය යයි ගනිමු.

එවිට $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{4}{3} - (-1)}{1 + \frac{4}{3}(-1)}\right| = 7 > 1$ 5

10 5

සූත්‍රයට (5) ආදේශයට (5)

$\therefore$ සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x - y + 3 = 0$ වේ. 5

එය පරාමිතිකව පහත දැක් වේ.

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = t$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $y = x + 3 = t + 3.$ 5

55

අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය පුළු කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටිය යුතුය.

5

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $(t, t+3)$ ආකාරයෙන් විය යුතුය

අරය $= \dfrac{|4t - 3(t+3) + 8|}{5} = \left|\dfrac{t-1}{5}\right|$ 5 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය

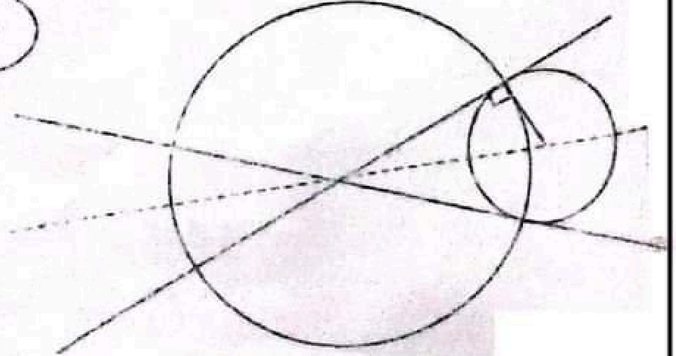
$$(x-t)^2 + (y-(t+3))^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2$$ 5

$$(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

20

ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන වෘත්ත සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේය යෙදීමෙන්

$$(t-1)^2 + (t+3-4)^2 = 1^2 + \frac{1}{25}(t-1)^2$$ 10



$$\therefore \quad (t-1)^2 = \frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow t-1 = \frac{5}{7} \quad \text{or} \quad t-1 = \frac{-5}{7}$$

5 5

$$\therefore \quad t = \frac{12}{7} \quad \text{or} \quad t = \frac{2}{7}$$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තවල සමීකරණ:

$$\left(x - \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{7}\right)^2 = \frac{1}{25}\left(\frac{12}{7} - 1\right)^2 \qquad \left(t = \frac{12}{7}\right)$$

$$(7x-12)^2 + (7y-33)^2 = 1$$ 5

$$\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{23}{7}\right)^2=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{7}-1\right)^2 \qquad \left(t=\frac{2}{7}\right)$$

$$(7x-2)^2+(7y-23)^2=1$$ 5

$\boxed{30}$

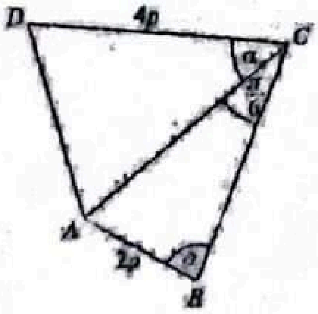
17. (a) $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලබාගන්න.

$k \in \mathbb{R}$ හා $k \neq 1$ යැයි ගනිමු. $k > 1$ හා $k < 1$ අවස්ථා වෙන වෙනම සලකමින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ යන්න $R\cos(\theta+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R(>0)$ k ඇසුරෙන් ද $\alpha\,(0<\alpha<2\pi)$ ද නිර්ණය කළ යුතු නියතයන් වේ.

ඒ නයින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ විසඳන්න.

(b) රූපයේ දැක්වෙන ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB=2p$, $CD=4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$ හා $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$ වේ. $AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $AD=4p$ නම් $\alpha=\tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.



(c) $x>1$ සඳහා $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

(a) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 5

sin (A-B) ලියන [illegible] 05

$\sin(A-B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(A-B)\right)$ 5

$=\cos\left((\frac{\pi}{2}-A)+B\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B$ 5

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ 5

20

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ 5 5

$=2k\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=k\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)+\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)$ 5

$=(k-1)\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$

$=2(k-1)\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$ 5

$=2(k-1)\cos(\theta+\beta)$ where $\beta=\frac{\pi}{3}$

5

$k>1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$;

මෙහි $R=2(k-1)$ හා $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 5

$k<1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(1-k)\cos\left(\pi+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

මෙහි $R=2(1-k)$ හා $\alpha=\frac{4\pi}{3}$. 5

35

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$

$k>1$ විට

$2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=k-1$

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ 5

$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad n\in\mathbb{Z}$

$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\ n\in\mathbb{Z}.$ 5

$k<1$ විට

$2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=1-k$ 5

$\therefore \quad \cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

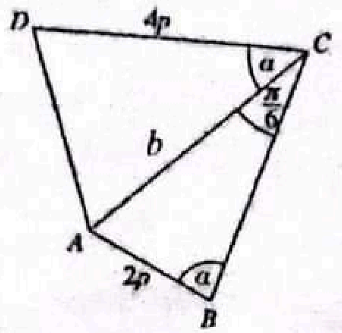
$\theta+\frac{4\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\, n\in\mathbb{Z}.$

$\therefore \quad \theta=2n\pi-\frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\, n\in\mathbb{Z}.$ 5

20

(b) ABC ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය :

10



$$\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow b=4p\sin\alpha$$ 5

ACD ත්‍රිකෝණයට කෝසයින් සූත්‍රය :

$$AD^2=b^2+(4p)^2-2b(4p)\cos\alpha$$ 10

$$=16p^2\sin^2\alpha+16p^2-2(4p)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$$ 5

30

$AD=4p$, නම්.

$\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1=1$

$\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)=0$ 5

නමුත් $\sin\alpha\neq 0$ $\sin\alpha=2\cos\alpha$ 5

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$ $\cos\alpha\neq 0$

$\therefore$ $\tan\alpha=2$ and $\alpha=\tan^{-1}(2)$. 5

15

$AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$

$16p^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$

(c)

$x > 1$:

$$\underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2/3}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x\right)}_{\beta} + \underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2}\right)}_{\theta} = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta + \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad 5$$

$\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$ ✓ (05)

$$\tan(\beta + \theta) = \cot b\alpha \quad 5$$

$$\frac{\tan\beta + \tan\theta}{1 - \tan\beta\tan\theta} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad 5$$

$$\therefore \quad \frac{\ln x + \ln x^2}{1 - \ln x \ln x^2} = \frac{1}{\ln x^{\frac{2}{3}}} \quad 5$$

$$\frac{\ln x^3}{1 - 2(\ln x)^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}\ln x}$$

$t = \ln x \Rightarrow$

$$3 \times \frac{2}{3}t^2 = 1 - 2t^2 \quad 5$$

$$4t^2 = 1$$

$$\ln x = t = \frac{1}{2} \qquad \left(\because t \neq \frac{-1}{2}\ ;\ \ t = \ln x \ \text{ and } x > 1\right)$$

$$\therefore \qquad x = e^{\frac{1}{2}} \quad 5$$

සත්‍යාපනය

$$\tan^{-1}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right) + \tan^{-1}\left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right) + \tan^{-1}(\ln e) \doteq \frac{\pi}{2}.$$

30

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}} \doteq \frac{\pi}{4}. \quad = 1$$